Technische Universität München
Zentrum Mathematik – M11

Prof. Dr. E. Viehmann
P. Hamacher

WS 2012/13

Seminar über lineare algebraische Gruppen

Wir folgen in unserem Seminar im Wesentlichen dem Buch von Springer [Spr09]. Alle Verweise ohne weitere Angaben beziehen sich auf das Buch.
Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf den Fall, dass der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. Sofern es das Thema vereinfacht, nehmen wir außerdem an, dass dieser Körper Charakteristik 0 hat. Alle Begriffe, die während eines Vortrages definiert werden, sollten anhand anschaulicher Beispiele erklärt werden. Besonderen Wert wird hierbei auf den Fall klassischer linearer algebraischer Gruppen gelegt.
Die Literaturverweise geben die Stellen an, an denen Ihr Thema erläutert wird. Natürlich wird nicht erwartet, dass Sie alles erklären was in diesen Kapiteln behandelt wird.

1. Varietäten (Paul Hamacher)
Wiederholen Sie den Begriff einer affinen Varietät und definieren Sie Varietäten als Räume mit Funktionen. Insbesodere sollen Sie das Produkt von affinen Varietäten und Prävarietäten konstruieren. Definieren Sie die Dimension einer Varietät als Dimension des zugrundeliegenden topologischen Raumes. Definieren Sie projektive und quasi-projektive Varietäten und geben Sie eine explizite Beschreibung der regulären Funktionen auf diesen Varietäten an. (§1.1 - 1.7, [GW10] §1.12, §1.19 - 1.21, §5.3)

2. Lineare algebraische Gruppen (Arati Khairnar)
Definieren Sie lineare algebraische Gruppen und Hopf-Algebren und beweisen Sie, dass ihre Kategorien antiäquivalent zueinander sind. Definieren Sie die Einskomponente und beweisen Sie 2.2.1. Zeigen Sie, dass Kern und Bild eines Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen sowie der Normalisator und Zentralisator einer abgeschlossenen Untergruppe bzw. eines Elements eine abgeschlossene Untergruppe bilden. Beweisen Sie, dass sich jede lineare algebraische Gruppe abgeschlossen in die $\mathbf{GL}_n$ einbetten lässt. (§2.1 - 2.3, [Hum75] §8.2)

3. Die Jordan-Zerlegung und diagonalisierbare Gruppen (Hengrui Jiang)
Definieren und beweisen Sie die Jordan-Zerlegung für lineare algebraische Gruppen. Zeigen Sie 3.1.1 und die Klassifikation diagonalisierbarer Gruppen. Schreiben Sie die Aussage von 3.4.9 an und beweisen Sie sie in Charakteristik 0 mit Hilfe der Exponentialabbildung. (§2.4, §3.2, [Dra] §6)

4. Parabolische Untergruppen und Quotienten (Markus Wohlrab)
Definieren Sie vollständige Varietäten und erläutern Sie die Aussagen von 6.1.2 and 6.1.3. Wenn Sie möchten, können Sie die Beweise dieser Sätze überspringen und die Aussagen stattdessen anhand von anschaulichen Beispielen erklären. Definieren Sie außerdem den Quotienten von linearen algebraischen Gruppen und geben sie die Aussagen von 5.5.5, 5.5.6 und 5.5.10 ohne Beweis an. Erklären Sie die Eigenschaften des Quotienten am Beispiel von $\mathbf{GL}_2/\mathbf{T}_2 \cong \mathbf{P}^1$. Definieren Sie parabolische Untergruppen und zeigen Sie 6.2.2 - 6.2.5. Beweisen Sie anschließend 2.2.6 und benutzen Sie die Aussage um zu zeigen, dass $\mathbf{SL}_n$ zusammenhängend ist und um auflösbare und nilpotente Gruppen zu definieren. (§5.5 - 6.2)

5. Borel-Untergruppen (Daniela Pohl)
Beweisen Sie Borels Fixpunktsatz und den Satz von Lie-Kolchin. Definieren Sie Borel-Untergruppen und zeigen Sie, dass dies gerade die minimalen parabolischen Untergruppen sind und dass alle Borel-Untergruppen zueinander konjugiert sind. Erklären sie die Bijektion zwischen den Borel-Untergruppen von $\mathbf{GL}_n$, $\mathbf{Sp}_{2n}$ bzw. $\mathbf{O}_n$ und Flaggen von Vektorräumen mit gewissen Eigenschaften. Beweisen Sie die Bijektion im Fall der $\mathbf{GL}_n$ und $\mathbf{Sp}_{2n}$. Beweisen Sie zur Vorbereitung auf den achten Vortrag die Aussagen 6.3.2 und 6.3.3. (§6.2 - 6.3)

6. Tangentialräume und Derivationen (tba)
Motivieren und definieren Sie den Begriff eines Tangentialraums einer affinen Varietät und der Tangentialabbildung eines Morphismus. Definieren sie singuläre und nichtsinguläre Punkte und zeigen Sie, dass die nichtsingulären Punkte eine nichtleere offene Teilmenge bilden. Verfahren Sie hierzu wie in [Har77] I.5.3 und ersetzen Sie das Birationalitätsargument durch [GW10] 6.18. Folgern Sie, dass jede lineare algebraische Gruppe glatt ist. Definieren Sie anschließend den Modul von Differenzialen Ω und zeigen Sie seine explizite Beschreibung für den Koordinatenring einer affinen Varietät. Zeigen sie, dass $\Omega \otimes k_x$ kanonisch isomorph zum Kotangentialraum an x ist. (§4.1 - 4.3)

7. Lie-Algebren (Manuel Bergler)
Definieren Sie die Lie-Algebra einer linearen algebraischen Gruppe und zeigen Sie einige ihrer Eigenschaften (4.4.1 - 4.4.9). Berechnen Sie die Tangentialabbildung der Gruppenmultiplikation und der Bildung des Inversen. Erläutern Sie die Jordan-Zerlegung in der Lie-Algebra und beweisen Sie 4.4.21.(1). Zeigen Sie zum Schluss als erste Anwendung der Theorie den Satz von Lang. (§4.4)

8. Maximale Tori (Bernhard Werner)
Zeigen Sie 6.3.5 und folgern Sie, dass alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind. Wenn Sie die Zeit dafür haben, zeigen Sie, dass jedes Element einer linearen algebraischen Gruppen in einer Borel-Untergruppe enthalten ist. Zeigen Sie, dass jede Borel-Untergruppe ihr eigener Normalisator ist und konstruieren Sie eine kanonische Bijektion zwischen G/B und der Menge aller Borel Untergruppen von G. In diesem Vortrag dürfen Sie die Ergebnisse aus vorangegangenen Kapiteln ohne Beweis benutzen. (§6.3 - 6.4)

9. Weylgruppen und halbeinfache Gruppen vom Rang 1 (tba)
Definieren Sie die Weylgruppe einer zusammenhängenden linearen algebraischen Gruppe und beweisen Sie deren Charakterisierung in Theorem 7.1.9. Benutzen Sie dann die Theorie der Weylgruppen um zu zeigen, dass $\mathbf{GL}_2$ und $\mathbf{PGL}_2$ die einzigen halbeinfachen Gruppen vom Rang 1 sind. Falls sich kein Interessent für diesen Vortrag findet, wird er mit dem zehnten Vortrag zusammengelegt. (§7.1 - 7.2)

10. Die Struktur von reduktiven Gruppen (tba)
Dieser Vortrag soll einen Überblick über die Strukturtheorie reduktiver linearer algebraischer Gruppen geben. (§7 - 10)

Literatur

[Dra] Jan Draisma, *Notizen zur Vorlesung über algebraische Gruppen*, http://jones.math.unibas.ch/ draisma/teaching/algp.

[GW10] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn, *Algebraic geometry I*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010, Schemes with examples and exercises. MR 2675155 (2011f:14001)

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157 (57 #3116)

[Hum75] James E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, New York, 1975, Graduate Texts in Mathematics, No. 21. MR 0396773 (53 #633)

[Spr09] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, second ed., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009. MR 2458469 (2009i:20089)