Die Dade-Vermutungen für die sporadische Suzuki-Gruppe

von
Frank Himstedt

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
Oktober 1999

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. H. Pahlings

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **3**

1 p-Ketten **5**

1.1 p-Ketten 5

1.2 Ketten in Faktorgruppen 7

1.3 Summen über p-Ketten 8

2 Grundlagen aus der Darstellungstheorie **9**

2.1 Idempotente 10

2.2 p-modulare Systeme 12

2.3 Charaktere in Blöcken 13

2.4 Blocktheorie für gewöhnliche Gruppenalgebren 16

2.5 Defekte und Defektgruppen 18

2.6 Brauer-Korrespondenz 19

3 Die gewöhnlichen Dade-Vermutungen **23**

3.1 Die gewöhnliche Dade-Vermutung 23

3.2 Die invariante Dade-Vermutung 26

4 Darstellungstheorie für verschränkte Gruppenalgebren **29**

4.1 Verschränkte Gruppenalgebren 29

4.2 Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren 31

4.3 Defekte und Defektgruppen 34

4.4 Brauer-Korrespondenz . . . 36

5 Die projektiven Dade-Vermutungen 39

5.1 Die projektive Dade-Vermutung . . . 40

5.2 Reduktion auf Überlagerungsgruppen . . . 42

5.3 Die projektiv-invariante Dade-Vermutung . . . 48

6 Verifikation für die sporadische Suzuki-Gruppe 51

6.1 Reduktionen und Vereinfachungen . . . 52

6.2 Bestimmung der elementaren p-Ketten und ihrer Normalisatoren . . . 54

6.3 Die Urbilder der Kettennormalisatoren . . . 57

6.4 Abzählen der Charaktere . . . 61

6.5 Der Fall p=2 . . . 66

6.6 Der Fall p=3 . . . 74

6.7 Der Fall p=5 . . . 81

Anhang. GAP-Routinen 87

Literaturverzeichnis 95

Vorwort

Eine Vorlesung von Richard Brauer [Bra63] hat die Darstellungstheorie endlicher Gruppen in den letzten 30 Jahren wesentlich beeinflußt. In dieser Vorlesung stellt Brauer eine Liste der seiner Meinung nach interessantesten offenen Fragen der Darstellungstheorie vor. Während eine Reihe dieser Probleme inzwischen gelöst ist, sind einige der Fragen immer noch unbeantwortet. Das ,,Problem 23" aus dieser Vorlesung ist als die Brauersche Höhe-0-Vermutung bekannt geworden, die auch heute noch unbewiesen und unwiderlegt ist. Knörr und Robinson konnten 1989 in [KR89] zeigen, daß eine Richtung der Höhe-0-Vermutung folgt, wenn man zwei Vermutungen nachweisen kann, die auf Alperin und McKay zurückgehen: die Alperinsche Gewichtsvermutung und die Alperin-McKay-Vermutung ([Alp87] und [Alp75]). Diese Vermutungen hat Dade in [Dad92], [Dad94] und [Dad97] zu einer Serie weiterer Vermutungen verallgemeinert.

Dade weist nach, daß aus einer Variante seiner Vermutungen die Alperinsche Gewichtsvermutung und die Alperin-McKay-Vermutung folgen. Somit würde ein Beweis der Dade-Vermutungen auch den Nachweis einer Richtung von Brauers Höhe-0-Vermutung implizieren. Die allgemeinste Version der Dade-Vermutungen, die ,,induktive Vermutung", enthält alle anderen Varianten der Dade-Vermutungen als Spezialfall. Sie hat den Vorteil, daß sich ihr Beweis auf den Nachweis für alle endlichen, nicht-abelschen, einfachen Gruppen reduzieren läßt.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Verifikation der induktiven Dade-Vermutung für die sporadische Suzuki-Gruppe Suz. Nach [Dad92] ist die induktive Vermutung für Suz äquivalent zur sogenannten projektiv-invarianten Vermutung, weil die äußere Automorphismengruppe von Suz zyklisch von Ordnung 2 ist. Die projektiv-invariante Vermutung enthält drei schwächere Varianten als Spezialfälle: die gewöhnliche, die invariante und die projektive Vermutung. Da die Verifikation jeder dieser schwächeren Varianten einen partiellen Beweis der stärkeren Vermutungen bildet, werden für Suz zunächst die gewöhnliche und die invariante Vermutung verifiziert. Anschließend wird die Gültigkeit der projektiven und der projektiv-invarianten Vermutung für Suz nachgewiesen. Die gewöhnliche Dade-Vermutung, die schwächste Form der Dade-Vermutungen, drückt die Anzahl irreduzibler Charaktere vom Defekt d in einem p-Block B einer endlichen Gruppe G durch die Anzahlen entsprechender Charaktere gewisser p-lokaler Untergruppen von G aus. Die in der Formulierung der Vermutungen benutzten alternierenden Summen laufen über G-Konjugiertenklassen gewisser Familien von p-Ketten C in G. Die hierbei auftretenden p-lokalen Untergruppen sind die Normalisatoren $N_G(C)$ dieser Ketten.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst einige elementare Ergebnisse zu p-Ketten und Kettennormalisatoren vorgestellt. Hierbei wird besonderes Gewicht auf die Behandlung elementarer p-Ketten von G gelegt, auf denen die in dieser Arbeit benutzte Methode zur Verifikation der Dade-Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ beruht. Im zweiten Kapitel werden die zur Formulierung und Verifikation der Dade-Vermutungen benötigten darstellungstheoretischen Grundlagen behandelt. Die gewöhnliche und invariante Vermutung werden im dritten Kapitel beschrieben. Das vierte Kapitel stellt die von Dade entwickelte Blocktheorie verschränkter Gruppenalgebren vor; eine umfassende Darstellung dieser Theorie erscheint auf Grund ihres Umfangs nicht sinnvoll, so daß das vierte Kapitel im wesentlichen eine Auflistung der benötigten Sätze und Definitionen bildet. Im fünften Kapitel werden die projektive und die projektiv-invariante Vermutung vorgestellt. Hier wird insbesondere ein Beweis angegeben, der die projektive Dade-Vermutung für verschränkte Gruppenalgebren auf eine Version für endliche Überlagerungsgruppen zurückführt. Im sechsten Kapitel wird schließlich der Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung für die sporadische Suzuki-Gruppe Suz geführt. Zunächst werden die elementaren p-Ketten von Suz sowie die entsprechenden Ketten der zweifachen, dreifachen und sechsfachen Überlagerung bis auf Konjugation bestimmt. Anhand der zugehörigen Kettennormalisatoren wird dann die Vermutung verifiziert. Die hierzu notwendigen Berechnungen wurden mit dem Computeralgebrasystem GAP [GAP98] durchgeführt.

Das Thema dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Pahlings. Ihm sei für die stets hilfsbereite Betreuung gedankt, die mir dennoch große Freiheit bei der Bearbeitung ließ. Ihm verdanke ich auch zwei der Poset-Diagramme im sechsten Kapitel. Mein besonderer Dank gilt außerdem Dr. Thomas Breuer und Dr. Jürgen Müller, die immer Zeit fanden, auf meine Fragen einzugehen, und durch viele Gespräche und Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen. Dem Erstgenannten sei insbesondere für die Berechnung der Charaktertafel des Kettennormalisators N_2^* gedankt, die im sechsten Kapitel benötigt wurde.

Kapitel 1

p-Ketten

Die Dade-Vermutungen behandeln alternierende Summen über endliche Familien von p-Ketten. In diesem Kapitel soll zunächst der Begriff der p-Kette einer endlichen Gruppe G sowie der Begriff des Kettennormalisators eingeführt und erläutert werden.

Anschließend werden zwei spezielle Familien von p-Ketten, die Radikal-p-Ketten und die elementaren p-Ketten, etwas genauer vorgestellt. Die Radikal-p-Ketten treten in Dades Formulierung seiner Vermutungen auf, während die elementaren p-Ketten bei der Verifikation der Dade-Vermutungen für die sporadische Suzuki-Gruppe in Kapitel 6 eine wichtige Rolle spielen werden. Schließlich wird noch darauf eingegangen, wie p-Ketten einer endlichen Gruppe G und p-Ketten spezieller Faktorgruppen von G zusammenhängen.

In diesem Kapitel sei stets die folgende Voraussetzung erfüllt:

Voraussetzung:
Es sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe.

1.1 p-Ketten

Es soll zunächst der für alles weitere grundlegende Begriff der „p-Kette" definiert werden:

1.1.1 Definition (p-Ketten)
Es sei $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, und P_i eine p-Untergruppe von G für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit $P_i < P_{i+1}$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Dann heißt das $(n+1)$-Tupel $C := (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ eine p-Kette von G. Man schreibt:

$$C : P_0 < P_1 < \cdots < P_n \ .$$

$|C| := n$ heißt die Länge von C; die Untergruppen P_i heißen die Untergruppen von C; speziell heißt P_0 die Startuntergruppe, P_n die Enduntergruppe von C. Die p-Kette $C_0 : \{1\}$ heißt die triviale p-Kette oder kurz die triviale Kette von G.

Die Menge aller p-Ketten von G sei mit $\mathcal{C}(G)$ bezeichnet. Es sei E eine Erweiterungsgruppe von G, d.h. es sei E eine Gruppe mit $G \trianglelefteq E$. Dann operiert E auf $\mathcal{C}(G)$ per Konjugation durch:

$$C^x := P_0^x < P_1^x < \cdots < P_n^x \ , \tag{1.1}$$

wobei P_i^x die zu P_i konjugierte Untergruppe $P_i^x := x^{-1}P_i x$ bezeichne. Zwei p-Ketten $C, C' \in \mathcal{C}(G)$ heißen „konjugiert", wenn es ein $g \in G$ gibt mit $C' = C^g$, und sie heißen „konjugiert in E", wenn es ein $x \in E$ gibt mit $C' = C^x$. Die Stabilisatoren einer Kette unter dieser Operation von E auf $\mathcal{C}(G)$ erhalten einen eigenen Namen:

1.1.2 Definition (Kettennormalisatoren)
Es sei $G \trianglelefteq E$, und es sei $C : P_0 < P_1 < \cdots < P_n$ eine p-Kette von G. Dann heißt

$$N_E(C) := \{x \in E \mid P_i^x = P_i \text{ für i} = 0, 1, \ldots, \text{n}\}$$

der Kettennormalisator von C in E oder kurz der Normalisator von C in E.

Der Kettennormalisator einer p-Kette hängt in natürlicher Weise mit den Normalisatoren der Untergruppen der Kette zusammen. Ist nämlich $C : P_0 < P_1 < \cdots < P_n$ eine p-Kette von G und $N_E(P_i)$ der Normalisator der Untergruppe P_i in E für $i = 0, 1, \ldots, n$, so gilt offenbar:

$$N_E(C) = \bigcap_{i=0}^{n} N_E(P_i) \ . \tag{1.2}$$

Zwei spezielle Teilmengen von $\mathcal{C}(G)$ sind für die Formulierung der Dade-Vermutungen und ihre Verifikation von besonderer Bedeutung:

1.1.3 Definition (Radikal-p-Ketten und elementare p-Ketten)
Es sei $C : P_0 < \cdots < P_n$ eine p-Kette von G und P ein p-Normalteiler von G.

1. C heißt elementar, wenn P_0 normal in G ist und die Faktoren P_i/P_0 elementarabelsch sind für $i = 0, \ldots, n$. $\mathcal{E}(G|P)$ sei die Menge aller elementaren p-Ketten von G mit Anfangsuntergruppe P. Es sei ferner $\mathcal{E}(G) := \mathcal{E}(G|\{1\})$.

2. C heißt eine Radikal-p-Kette, wenn $P_0 = O_p(G)$ ist und für $i = 0, \ldots, n$

$$P_i = O_p(N_G(P_0 < \cdots < P_i)) \tag{1.3}$$

gilt, wobei $O_p(G)$ wie üblich den größten p-Normalteiler von G bezeichne. Es sei $\mathcal{R}(G)$ die Menge aller Radikal-p-Ketten.

Es sei P ein p-Normalteiler von G und $\mathcal{F} \in \{\mathcal{E}(G|P)\ ,\ \mathcal{E}(G)\ ,\ \mathcal{R}(G)\}$. Operiert G gemäß (1.1) auf $\mathcal{C}(G)$ per Konjugation, so ist $\mathcal{F}$ offensichtlich invariant unter dieser Operation, insbesondere ist $\mathcal{F}$ disjunkte Vereinigung von G-Bahnen. Diese G-Bahnen heißen auch die Konjugiertenklassen von $\mathcal{F}$. Ein Vertretersystem dieser Konjugiertenklassen werde im folgenden stets mit $\mathcal{F}/G$ bezeichnet.

1.2 Ketten in Faktorgruppen

Es sei eine zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow G^* \xrightarrow{\eta^*} G \longrightarrow 1 \tag{1.4}$$

von endlichen Gruppen gegeben. Für die projektiven Versionen der Dade-Vermutungen ist die Frage von Interesse, welcher Zusammenhang zwischen den p-Ketten des Faktors G und den p-Ketten der Erweiterungsgruppe G^* besteht. Der zentrale Normalteiler Z läßt sich in eindeutiger Weise schreiben als direktes Produkt

$$Z = P \times N, \tag{1.5}$$

wobei P ein zentraler p-Normalteiler und N ein zentraler p'-Normalteiler ist. Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen den p-Ketten von G und den p-Ketten von G^*, deren Anfangsuntergruppen P enthalten:

1.2.1 Satz (p-Ketten in Faktorgruppen)
Es seien G^*, Z, P und N gemäß (1.4) und (1.5) gegeben. Es sei $\mathcal{C}(G)$ die Menge aller p-Ketten von G und $\mathcal{C}_P(G^*)$ die Menge aller p-Ketten von G^*, deren Anfangsuntergruppe P enthält. Dann gibt es eine kettenlängenerhaltende Bijektion

$$^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(G) & \longrightarrow & \mathcal{C}_P(G^*) \\ C & \longmapsto & C^* \end{array} ,$$

mit:

$$N_{G^*}(C^*) = (\eta^*)^{-1}(N_G(C)) \tag{1.6}$$

für alle p-Ketten $C \in \mathcal{C}(G)$. Ferner bildet * die Familien $\mathcal{E}(G)$ auf $\mathcal{E}(G^*|P)$ und $\mathcal{R}(G)$ auf $\mathcal{R}(G^*)$ ab.

Beweis: Dieser Satz ist eine Zusammenfassung von [Dad94, Proposition 2.3, (2.5), Theorem 2.9]. ■

1.3 Summen über p-Ketten

Es sei E eine endliche Gruppe mit $G \trianglelefteq E$. G operiere auf der Menge $\mathcal{C}(G)$ der p-Ketten von G per Konjugation gemäß (1.1), und es sei $\mathcal{F}$ eine G-invariante Teilmenge von $\mathcal{C}(G)$. Es sei $f : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine Abbildung mit

$$f(C) = f(C') \quad \text{für alle } C, C' \in \mathcal{C}(G) \text{ mit } N_E(C) = N_E(C') \tag{1.7}$$

und

$$f(C) = f(C^g) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C}(G) \text{ und } g \in G. \tag{1.8}$$

Es sei $\mathcal{F}/G$ ein Vertretersystem der G-Konjugiertenklassen von $\mathcal{F}$. Dann ist wegen (1.8) die alternierende Summe

$$\sum_{C \in \mathcal{F}/G} (-1)^{|C|} f(C) \tag{1.9}$$

unabhängig von der Wahl des Vertretersystems $\mathcal{F}/G$. Der folgende Satz besagt, daß der Wert dieser alternierenden Summe im Fall $O_p(G) = \{1\}$ unabhängig davon ist, ob man für $\mathcal{F}$ die Familie der Radikal-p-Ketten oder der elementaren p-Ketten wählt:

1.3.1 Satz
Es sei E eine endliche Gruppe mit $G \trianglelefteq E$ und $O_p(G) = \{1\}$. Es sei ferner $f : \mathcal{C}(G) \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1.7) und (1.8). Dann sind die beiden folgenden alternierenden Summen unabhängig von der Wahl des jeweiligen Vertretersystems, und es gilt:

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} f(C) = \sum_{C \in \mathcal{E}(G)/G} (-1)^{|C|} f(C)$$

Beweis: Die erste Aussage ist bereits gezeigt und gilt auch ohne die Voraussetzung $O_p(G) = \{1\}$. Der zweite Teil der Aussage ist eine Zusammenfassung von [Dad92, Gleichung (3.6), Proposition 3.7]. ■

Kapitel 2

Grundlagen aus der Darstellungstheorie

Dieses Kapitel bereitet die Formulierung der Dade-Vermutungen vor. Hier werden die benötigten Begriffe aus der gewöhnlichen und der modularen Darstellungstheorie zusammengefaßt.

Im ersten Abschnitt wird zunächst mit Hilfe von Idempotenten der Begriff des Blocks eines Ringes eingeführt. Anschließend werden im zweiten Abschnitt einige grundlegende Begriffe der modularen Darstellungstheorie wie der des p-modularen Systems und des Zerfällungskörpers definiert. Im dritten Abschnitt wird eine Blocktheorie vorgestellt, die sich unter anderem auf Gruppenringe KG und allgemeiner die verschränkten Gruppenalgebren einer endlichen Gruppe G anwenden läßt. In den letzten drei Abschnitten wird diese Blocktheorie für den Spezialfall einer gewöhnlichen Gruppenalgebra KG genauer betrachtet, weiter verfeinert und ausgebaut.

Die Blocktheorie aus dem dritten Abschnitt wird in ihrer vollen Allgemeinheit erst im vierten Kapitel zur Untersuchung der projektiven Dade-Vermutungen benutzt. Die Aussagen im Spezialfall der gewöhnlichen Gruppenalgebren dienen vornehmlich zur Formulierung der gewöhnlichen Vermutungen im dritten Kapitel.

2.1 Idempotente

In diesem Abschnitt wird der Begriff des Idempotents eines Ringes eingeführt. Mit Hilfe von Idempotenten lassen sich Zerlegungen eines Ringes in Linksideale, unzerlegbare Linksideale, zweiseitige Ideale etc. beschreiben. Die Kenntnis der Idempotente eines Ringes verrät daher bereits viel über die Struktur des Ringes. Ringe und Algebren seien stets Ringe bzw. Algebren mit einem Einselement. Unterringe bzw. Unteralgebren müssen hingegen im folgenden nicht notwendigerweise eine Eins besitzen. Es soll zunächst der Begriff des Idempotents definiert werden:

2.1.1 Definition (Idempotente, Sätze von Idempotenten)
Es sei A ein Ring und $e \in A$.

(a) e heißt Idempotent genau dann, wenn $e^2 = e$ gilt.

(b) Zwei Idempotente $e_1, e_2 \in A$ heißen orthogonal genau dann, wenn $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ ist.

(c) Ein Idempotent $e \in A$ heißt primitiv genau dann, wenn e nicht Null ist und sich e nicht als Summe zweier von Null verschiedener Idempotente schreiben läßt.

(d) Ein Idempotent e heißt zentral-primitiv genau dann, wenn e nicht Null ist, e zentral ist und sich nicht als Summe zweier von Null verschiedener zentraler Idempotente schreiben läßt.

(e) Sind $e_1, e_2, \ldots, e_n \in A$ paarweise orthogonale Idempotente mit

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n \ , \tag{2.1}$$

so heißt das n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ein Satz von orthogonalen Idempotenten. Sind zusätzlich $e_1, \ldots, e_n$ primitiv bzw. zentral-primitiv, so spricht man von einem Satz von primitiven bzw. zentral-primitiven Idempotenten.

Wie bereits angesprochen, lassen sich mit Hilfe von Idempotenten Zerlegungen eines Ringes A in Linksideale, zweiseitige Ideale, unzerlegbare Linksideale etc. beschreiben:

Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ ein Satz von orthogonalen Idempotenten eines Ringes A, so zerfällt A in eine direkte Summe von Linksidealen:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i \ . \tag{2.2}$$

Sind die e_i sogar primitiv, so sind die in der Zerlegung (2.2) auftretenden Linksideale Ae_i unzerlegbar. Sind die e_i zentrale Idempotente, so sind die in (2.2) auftretenden Linksideale sogar zweiseitige Ideale. Sind die Idempotente e_i zentral-primitiv, so sind die in (2.2) auftretenden zweiseitigen Ideale Ae_i unzerlegbar als zweiseitige Ideale.

Umgekehrt liefert jede Zerlegung der Form (2.2) einen Satz von orthogonalen Idempotenten: Die $1 \in A$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$1 = e_1 + \cdots + e_n \ . \tag{2.3}$$

Wie man leicht nachrechnet, bilden die so definierten e_i einen Satz von orthogonalen Idempotenten. Sind die in (2.2) auftretenden Linksideale Ae_i unzerlegbare Linksideale bzw. zweiseitige Ideale bzw. zweiseitige Ideale, die als zweiseitige Ideale unzerlegbar sind, so sind die durch (2.3) definierten Idempotente e_i sogar primitiv bzw. zentral bzw. zentral-primitiv.

Wie man leicht sieht, sind Sätze von zentral-primitiven Idempotenten eines Ringes A stets bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt. Hieraus folgt unmittelbar: Bilden die Idempotente $e_1, \ldots, e_n$ einen Satz von zentral-primitiven Idempotenten, so sind die direkten Summanden der Zerlegung (2.2) eindeutig bis auf Reihenfolge. Dies läßt sich in folgendem Satz zusammenfassen:

2.1.2 Satz

Ist A ein Ring und besitzt A einen Satz von zentral-primitiven Idempotenten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, so läßt sich A schreiben als:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A\varepsilon_i \ . \tag{2.4}$$

Hierbei sind die $A\varepsilon_i$ zweiseitige Ideale von A für $i = 1, \ldots, n$, die als zweiseitige Ideale unzerlegbar sind. Jeder weitere Satz von zentral-primitiven Idempotenten von A unterscheidet sich von dem Satz $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ nur durch die Reihenfolge der Idempotente. Insbesondere ist die Zerlegung von A in eine direkte Summe von zweiseitigen Idealen, die als zweiseitige Ideale unzerlegbar sind, eindeutig bis auf die Reihenfolge der direkten Summanden.

■

Satz 2.1.2 legt die folgende Definition nahe:

2.1.3 Definition

Ist A ein Ring und besitzt A eine Zerlegung der Form (2.4) in zweiseitige Ideale, die als zweiseitige Ideale unzerlegbar sind, so heißen diese zweiseitigen Ideale $A\varepsilon_i$ für $i = 1, \ldots, n$ die Blöcke von A. Die zentral-primitiven Idempotente ε_i heißen dann Blockidempotente, und die Zerlegung (2.4) heißt dann eine Blockzerlegung von A. Die Menge der Blöcke von A wird mit $\mathrm{Blk}(A)$ bezeichnet.

2.2 p-modulare Systeme

Die modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen stellt eine Verbindung her zwischen den Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 und Darstellungen über Körpern von Primcharakteristik. Diese Verbindung beruht unter anderem auf dem Begriff des „p-modularen Systems", der nun definiert werden soll:

2.2.1 Definition (p-modulares System)
Es sei p eine Primzahl. Ein Tripel (K, R, F) heißt p-modulares System genau dann, wenn K ein Körper der Charakteristik 0 mit einer (Exponential-)Bewertung ν_p ist, R vollständiger diskreter Bewertungsring in K zur Bewertung ν_p ist und $F = R/\pi R$ der zugehörige Restklassenkörper von Charakteristik p ist, wobei π das bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmte Primelement in R ist. ν_p sei stets so normiert, daß $\nu_p(p) = 1$ ist.

Für die Darstellungstheorie einer endlichen Gruppe G sind besonders solche p-modularen Systeme (K, R, F) von Bedeutung, bei denen alle absolut irreduziblen Darstellungen von G in Charakteristik 0 bzw. p über K bzw. F realisierbar sind. Solche p-modularen Systeme heißen Zerfällungssysteme:

2.2.2 Definition (Zerfällungskörper, Zerfällungssystem)
Es seien K ein Körper, A eine K-Algebra und G eine Gruppe.

(a) K heißt ein Zerfällungskörper für A genau dann, wenn für jeden einfachen A-Modul V seine Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_A(V)$ als K-Algebra isomorph zu K ist, d.h. wenn
$$\mathrm{End}_A(V) \cong K$$
gilt. Ist K ein Zerfällungskörper für A, so heißt A zerfallend.

(b) K heißt Zerfällungskörper für G genau dann, wenn K Zerfällungskörper für die Gruppenalgebra KG ist.

(c) Ist (K, R, F) ein p-modulares System, so daß K und F Zerfällungskörper für G sind, so heißt das Tripel (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G.

2.2.3 Bemerkung
Ist (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G, so sind alle absolut irreduziblen Darstellungen von G in Charakteristik 0 bzw. p über K bzw. F realisierbar.

Standardbeispiele für p-modulare Systeme und p-modulare Zerfällungssysteme sind gegeben durch:

2.2.4 Beispiele

(a) Es seien $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen versehen mit der üblichen p-adischen Bewertung, $\mathbb{Z}_p$ der Ring der ganzen p-adischen Zahlen und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Dann ist $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$ ein p-modulares System.

(b) Es sei G eine endliche Gruppe mit Exponent $e := \exp(G)$ und ε eine primitive e-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}_p$. Dann läßt sich bekanntlich die p-adische Bewertung ν_p von $\mathbb{Q}_p$ eindeutig zu einer Bewertung $\tilde{\nu}_p$ von $\mathbb{Q}_p(\varepsilon)$ fortsetzen. Dann ist $\mathbb{Q}_p(\varepsilon)$ vollständig bezüglich $\tilde{\nu}_p$. Durch $R' := \{x \in \mathbb{Q}_p(\varepsilon) \mid \tilde{\nu}_p(x) \geq 0\}$ wird ein vollständiger diskreter Bewertungsring in $K' := \mathbb{Q}_p(\varepsilon)$ definiert. Bezeichnet F' den zugehörigen Restklassenkörper, so ist (K', R', F') ein p-modulares Zerfällungssystem. Insbesondere gibt es also zu jeder endlichen Gruppe und jeder Primzahl p ein p-modulares Zerfällungssystem.

2.3 Charaktere in Blöcken

Die Dade-Vermutungen machen Aussagen über das Abzählen von Charakteren in Blöcken. Es sollen daher hier kurz die aus der Blocktheorie benötigten Grundlagen zusammengefaßt werden. Die Aussagen und Sätze werden dabei so allgemein gehalten, daß sie später zur Entwicklung einer entsprechenden Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren dienen können. In diesem Abschnitt sei stets folgende Voraussetzung erfüllt:

2.3.1 Voraussetzung
Es sei

- p *eine Primzahl,*
- (K, R, F) *ein* p*-modulares System mit (bis auf Assoziiertheit eindeutigem) Primelement* π *von* R*,*
- A_K *eine endlich-dimensionale, zerfallende, halbeinfache* K*-Algebra und*
- A *eine* R*-Unterordnung von* A_K *(d.h.* A *ist eine* R*-Unteralgebra von* A_K*, die frei über* R *ist und eine endliche* R*-Basis besitzt), deren* K*-Erzeugnis gleich* A_K *ist.*

2.3.2 Beispiel
Das Standardbeispiel für ein Quintupel (K, R, F, A_K, A), das die Voraussetzung 2.3.1 erfüllt, ist durch die folgende Situation gegeben: Es sei (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für eine endliche Gruppe G. Dann erfüllen

$$(K, R, F),\ A := RG \text{ und } A_K := KG$$

die Voraussetzung 2.3.1.

Es seien also von nun an p, (K, R, F), A und A_K gemäß Voraussetzung 2.3.1 gewählt.

Da A_K nach Voraussetzung 2.3.1 halbeinfach ist, besitzt A_K einen Satz von zentral-primitiven Idempotenten. Zwischen den im Abschnitt 2.1 eingeführten zentral-primitiven Idempotenten von A_K und den irreduziblen Charakteren von A_K besteht ein enger Zusammenhang, der durch folgenden Satz geklärt wird:

2.3.3 Satz
Unter den Voraussetzungen 2.3.1 ist die Anzahl der zentral-primitiven Idempotente von A_K gleich der Anzahl der irreduziblen Charaktere von A_K. Genauer gilt: Sind $c_1, \ldots, c_n$ die zentral-primitiven Idempotente von A_K und bezeichnet $\mathrm{Irr}(A_K) = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ die Menge der irreduziblen K-Charaktere von A_K, so wird (nach geeigneter Numerierung der Idempotente) durch

$$\mathrm{Irr}(A_K) \longleftrightarrow \{c_1, \ldots, c_n\}$$

$$\chi_i(c_j) = \delta_{ij}$$

eine Bijektion definiert.

Beweis: siehe [Isa76, Kapitel 2, S. 16]. ■

Es soll nun der Zusammenhang zwischen den zentral-primitiven Idempotenten von A und den zentral-primitiven Idempotenten von $\bar{A} := A/\pi A$ untersucht werden. Dieser Zusammenhang ist durch den folgenden Satz gegeben:

2.3.4 Satz
Unter den Voraussetzungen 2.3.1 wird durch die Abbildung

$$e \longmapsto \bar{e} := e + \pi A$$

eine Bijektion der Menge der zentral-primitiven Idempotente von A auf die Menge der zentral-primitiven Idempotente von $\bar{A}$ definiert. Insbesondere besitzt A eine Blockzerlegung, und die Blöcke von A stehen in Bijektion zu den Blöcken von $\bar{A}$.

Beweis: siehe [Fei82, Theorem I.12.9]. ■

Da $\bar{A}$ eine endlich-dimensionale Algebra über dem Körper F ist, besitzt $\bar{A}$ eine Blockzerlegung. Aus Satz 2.3.4 folgt dann, daß auch die R-Unterordnung A von A_K eine Blockzerlegung

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} Ab_i \ , \tag{2.5}$$

besitzt, wobei $b_1, \ldots, b_r$ die zentral-primitiven Idempotente von A sind. Da A_K von A über K erzeugt wird, sind die Blockidempotente $b_1, \ldots, b_r$ auch zentrale Idempotente von A_K, jedoch nicht notwendigerweise zentral-primitiv. Ist

$$A_K = \bigoplus_{i=1}^{n} A_K c_i \tag{2.6}$$

eine Blockzerlegung von A_K, so ist jedes b_j Summe von c_i's. Hieraus folgt:

2.3.5 Lemma
Unter den Voraussetzungen 2.3.1 seien (2.5) bzw. (2.6) die Blockzerlegungen von A bzw. A_K. Dann gibt es zu jedem zentral-primitiven Idempotent c_i von A_K genau einen Block Ab_j mit $c_i b_j \neq 0$.

■

Aufgrund von Lemma 2.3.5 und Satz 2.3.3 läßt sich nun jedem irreduziblen Charakter von A_K ein Block von A zuordnen:

2.3.6 Definition (Charaktere in Blöcken)
Unter den Voraussetzungen 2.3.1 sei $\chi \in \mathrm{Irr}(A_K)$ ein irreduzibler Charakter von A_K, und es sei e_χ das gemäß Satz 2.3.3 zu χ gehörige zentral-primitive Idempotent von A_K. Es sei ferner B der nach Lemma 2.3.5 eindeutig bestimmte Block von A mit Blockidempotent e_B, so daß $e_\chi e_B \neq 0$ ist. Dann sagt man: χ gehört zum Block B.

Die Blöcke von A lassen sich auch mit Hilfe der sogenannten zentralen Charaktere beschreiben. Als einen zentralen Charakter $\bar{\omega}$ von $\bar{A}$ bezeichnet man einen von Null verschiedenen F-Algebrenhomomorphismus

$$\bar{\omega} : Z(\bar{A}) \longrightarrow F \ .$$

So wie die Blöcke von A_K in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von A_K stehen, so stehen die Blöcke von A in Bijektion zu den zentralen Charakteren von $\bar{A}$. Dies wird durch folgenden Satz näher ausgeführt:

2.3.7 Satz
Unter den Voraussetzungen 2.3.1 ist die Anzahl der Blöcke von A gleich der Anzahl der zentralen Charaktere von $\bar{A}$. Es seien $b_1, \ldots, b_r$ die Blockidempotente von A und $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_r$ die zentralen Charaktere von $\bar{A}$. Dann ist

$$Z(\bar{A}) = \bigoplus_{i=1}^{r} Z(\bar{A})\bar{b_i} \ ,$$

und die zentralen Charaktere von $\bar{A}$ lassen sich bei geeigneter Numerierung eindeutig beschreiben durch:

$$\bar{\omega}_i(\bar{b_j}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \in F & , \text{falls } i = j \\ 0 & , \text{falls } i \neq j \end{array} \right\} \tag{2.7}$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$.

Beweis: siehe [Dad99, §4]. ∎

2.4 Blocktheorie für gewöhnliche Gruppenalgebren

In den nächsten drei Abschnitten wird stets nur noch der Spezialfall betrachtet, der durch das Standardbeispiel 2.3.2 gegeben ist. Es gelte also für den Rest dieses Abschnitts stets:

- G ist eine endliche Gruppe,
- p eine Primzahl,
- (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G,
- A ist der Gruppenring RG von G über R und
- A_K ist der Gruppenring KG von G über K.

In diesem Spezialfall kann man die irreduziblen Charaktere von $A_K = KG$ mit den irreduziblen Charakteren von G identifizieren, denn es gilt: Die irreduziblen Charaktere von G sind genau die Einschränkungen der irreduziblen Charaktere von A_K auf die K-Basis G von A_K. Dies legt folgende Definition nahe:

2.4.1 Definition (Charaktere von Gruppen in Blöcken)
Unter einem (p-)Block von G versteht man einen Block des Gruppenrings RG. Ein irreduzibler Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ liegt in einem Block B von G genau dann, wenn B ein Block von G ist und wenn die K-lineare Fortsetzung von χ auf A_K zum Block B gehört (im Sinne von Definition 2.3.6). Ist B ein Block von G, so werde die Menge aller irreduziblen Charaktere von G, die im Block B liegen, mit $\mathrm{Irr}(B)$ bezeichnet.

Aus Satz 2.4.3 folgt, daß die Verteilung der irreduziblen Charaktere von G auf die p-Blöcke von G nicht vom diskreten Bewertungsring R abhängt. In diesem Sinne sind also die Blöcke von G unabhängig von R.

2.4.2 Definition (Hauptblock)
Der Block von G, der den trivialen Charakter von G enthält, heißt der Hauptblock von G.

Wie läßt sich feststellen, wann zwei irreduzible Charaktere im gleichen Block liegen? Diese Frage läßt sich mit Hilfe der zentralen Charaktere beantworten. Es seien

$$\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$$

und $C_1, \ldots, C_n$ die Konjugiertenklassen von G. Dann ist eine R-Basis des Zentrums $Z(RG)$ bekanntlich gegeben durch die Klassensummen $C_i^+ := \sum_{g \in C_i} g$ für $i = 1, \ldots, n$. Jedem irreduziblen Charakter $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ läßt sich nun ein zentraler Charakter $\omega_i : Z(RG) \longrightarrow R$ durch

$$\omega_i(C_j^+) := \frac{|C_j|\chi_i(g_j)}{\chi_i(1)} \text{ mit } g_j \in C_j \tag{2.8}$$

zuordnen. Jeder solche zentrale Charakter ω_i induziert in kanonischer Weise einen zentralen Charakter $\bar{\omega}_i : Z(FG) \longrightarrow F$ vermöge $\bar{\omega}_i(C_j^+) = \overline{\omega(C_j^+)}$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Mit Hilfe dieser zentralen Charaktere läßt sich nun leicht beschreiben, wann zwei irreduzible Charaktere von G in einem Block liegen:

2.4.3 Satz
Es seien $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{Irr}(G)$ und $\omega_i, \omega_j : Z(RG) \longrightarrow R$ bzw. $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_j : Z(FG) \longrightarrow F$ die wie oben definierten zugehörigen zentralen Charaktere. Dann sind äquivalent:

(a) *χ_i, χ_j gehören zum gleichen Block ,*

(b) *$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j$,*

(c) *$\omega_i(C^+) \equiv \omega_j(C^+)$ mod p im Ring der ganzen algebraischen Zahlen für alle p'-Klassen C von G.*

Beweis: siehe [Fei82, Lemma IV.4.2]. ■

2.5 Defekte und Defektgruppen

In den Dade-Vermutungen spielt der Defekt eines irreduziblen Charakters einer endlichen Gruppe eine wichtige Rolle. Der Begriff des Defekts eines irreduziblen Charakters sowie der damit eng verwandte Begriff des Defekts eines Blockes sollen nun eingeführt werden:

Es sei G eine endliche Gruppe und (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G. Es sei ν_p die gemäß Definition 2.2.1 normierte p-adische Bewertung auf R. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z} \subseteq R$: Ist $n = p^a m$ und p kein Teiler von m, so ist $\nu_p(n) = a$. D.h. ν_p ordnet jeder ganzrationalen Zahl $n \in R$ den Exponenten der größten p-Potenz zu, die n teilt. Damit läßt sich der Defekt eines irreduziblen Charakters und eines Blockes definieren:

2.5.1 Definition (Defekte von Charakteren und Blöcken)
Es sei G eine endliche Gruppe, (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G und ν_p die gemäß Definition 2.2.1 normierte p-adische Bewertung auf R.

(a) Für einen irreduziblen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ heißt die Zahl

$$d(\chi) := \nu_p(|G|) - \nu_p(\chi(1))$$

der Defekt von χ.

(b) Für einen p-Block B von G heißt die Zahl

$$d(B) := \max_{\chi \in Irr(B)} d(\chi)$$

der Defekt von B.

Da für jeden irreduziblen Charakter χ von G der Charaktergrad $\chi(1)$ ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ ist, sind die Zahlen $d(\chi)$ und $d(B)$ für jeden irreduziblen Charakter χ und jeden p-Block B von G nichtnegative ganze Zahlen.

In engem Zusammenhang zum Defekt eines Blockes steht die Defektgruppe eines Blockes, die nun definiert werden soll. Es sei B ein p-Block von G, d.h. B ist ein unzerlegbares zweiseitiges Ideal in RG. Dann operiert G per Konjugation auf RG durch: $x^g := g^{-1}xg$ für $g \in G$ und $x \in RG$. Für eine Untergruppe H von G sei

$$\mathrm{Inv}_H(RG) := \{x \in RG \mid x^h = x \text{ für alle } h \in H\} \tag{2.9}$$

der Invariantenraum von H in RG. Ist $\{g_1, \ldots, g_n\}$ eine Transversale von H in G, so bezeichne $\mathrm{Tr}_H^G : \mathrm{Inv}_H(RG) \longrightarrow \mathrm{Inv}_G(RG)$, definiert durch

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x^{g_i} \ , \tag{2.10}$$

die übliche relative H-Spur. Hiermit läßt sich definieren:

2.5.2 Definition (Defektgruppen von Blöcken)
Es sei G eine endliche Gruppe, B ein Block von G und e das zu B gehörige Blockidempotent in RG. Dann heißt eine Untergruppe H von G, die minimal ist hinsichtlich der Eigenschaft

$$e \in \mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Inv}_H(RG)) \ ,$$

eine Defektgruppe des Blockes B. Eine Defektgruppe von B werde im folgenden stets mit $\delta(B)$ bezeichnet.

2.5.3 Bemerkung
Man kann zeigen (vgl. [Gre68, Theorem 4]), daß die Defektgruppen eines Blockes B zueinander konjugiert sind und Ordnung $p^{d(B)}$ haben, insbesondere also p-Untergruppen von G sind.

2.6 Brauer-Korrespondenz

Für die Blockversionen der Dade-Vermutungen ist der Begriff des Brauer-Korrespondenten eines Blockes von Bedeutung. In diesem Abschnitt soll daher kurz die Brauer-Induktion eingeführt werden und einige Sätze hergeleitet werden, die zur Formulierung und zur Verifikation der Dade-Vermutungen benötigt werden.

Es sei im folgenden stets G eine endliche Gruppe, (K, R, F) ein p-modulares Zerfällungssystem für G und H eine Untergruppe von G. Es sei $s_H : Z(RG) \longrightarrow Z(RH)$ die durch

$$C^+ \longmapsto (C \cap H)^+ \text{ (für jede Konjugiertenklasse } C \text{ von } G)$$

und R-lineare Fortsetzung definierte Abbildung. Hierbei bedeute $(C \cap H)^+ := \sum_{h \in C \cap H} h$. s_H induziert in kanonischer Weise eine F-lineare Abbildung

$$\bar{s}_H : Z(FG) \longrightarrow Z(FH) \ .$$

Es sei b ein Block von H mit zentralem Charakter $\bar{\omega}_b : Z(FH) \longrightarrow F$ (im Sinne von Satz 2.3.7); dann ist die Komposition

$$\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H : Z(FG) \longrightarrow F \tag{2.11}$$

eine F-lineare Abbildung.

2.6.1 Definition (Brauer-Korrespondent)
Ist die Abbildung $\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H$ ein von Null verschiedener F-Algebrenhomomorphismus, so existiert nach Satz 2.3.7 genau ein Block B von G mit $\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H = \bar{\omega}_B$. Man schreibt $b^G := B$ und sagt: „b^G ist definiert". b^G heißt der Brauerkorrespondent von b.

Es sei H eine Untergruppe von G, b ein Block von H und b^G definiert. Wie stellt man fest, welcher Block B von G von b induziert wird, d.h. welche irreduziblen Charaktere von G im Block b^G liegen? Um dies zu untersuchen, kann man gemäß Definition 2.6.1 vorgehen und die Abbildung $\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H$ betrachten. Ist $\theta \in \mathrm{Irr}(b)$ und ω_θ der gemäß (2.8) zugehörige zentrale Charakter, so gilt $\bar{\omega}_\theta = \bar{\omega}_b$. Es genügt also, die Abbildung $\omega_\theta \circ s_H$ für ein $\theta \in \mathrm{Irr}(b)$ zu untersuchen. Über $\omega_\theta \circ s_H$ gibt folgendes Lemma Auskunft:

2.6.2 Lemma
Es sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$, b ein Block von H, $\theta \in \mathrm{Irr}(b)$ und C eine Konjugiertenklasse von G. Dann gilt:

$$\omega_\theta \circ s_H(C^+) = \frac{\theta^G(C^+)}{\theta^G(1)} \ . \tag{2.12}$$

(Hierbei wurde θ^G linear auf den Gruppenring fortgesetzt.)

Beweis: Es sei $g \in C$ ein Vertreter aus C. Dann folgt aus der Definition des induzierten Charakters θ^G unmittelbar:

$$\theta^G(g) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}\ \theta\big((C \cap H)^+\big) = \frac{|C_G(g)|}{|H|}\ \theta\big(s_H(C^+)\big) \ . \tag{2.13}$$

Aus

$$\frac{\theta^G(C^+)}{\theta^G(1)} = \frac{|C|\ \theta^G(g)}{\theta^G(1)}$$

folgt durch Einsetzen von (2.13) in die rechte Seite:

$$\frac{\theta^G(C^+)}{\theta^G(1)} = \frac{|G|\ |C_G(g)|\ \theta \circ s_H(C^+)}{|C_G(g)|\ \theta^G(1)\ |H|} \tag{2.14}$$

und somit weiter:

$$\frac{\theta^G(C^+)}{\theta^G(1)} = \frac{|G|}{[G:H]\ \theta(1)}\ \frac{\theta \circ s_H(C^+)}{|H|} = \frac{\theta \circ s_H(C^+)}{\theta(1)} = \omega_\theta \circ s_H(C^+) \ .$$

■

2.6.3 Bemerkung
Ist $H \leq G$ und b ein Block von H, von dem man weiß, daß $B := b^G$ definiert ist, so lassen sich die irreduziblen Charaktere in b^G mit Hilfe von Lemma 2.6.2 leicht feststellen: Man wählt einen irreduziblen Charakter $\theta \in \mathrm{Irr}(b)$ und berechnet $\omega_\theta \circ s_H$ gemäß Lemma 2.6.2. Dann ist $\bar{\omega}_B = \overline{\omega_\theta \circ s_H}$. Ist χ ein irreduzibler Charakter von G mit zugehörigem zentralem Charakter ω_χ, so folgt aus Satz 2.4.3: χ liegt im Block b^G genau dann, wenn

$$\omega_\chi(C^+) \equiv \omega_B(C^+) \bmod \mathrm{p}$$

für alle p'-Klassen C von G gilt. Somit lassen sich leicht alle irreduziblen Charaktere von G im Block b^G finden.

Für eine beliebige Untergruppe H von G ist der Brauerkorrespondent b^G im allgemeinen nicht definiert. Ist jedoch H ein Kettennormalisator einer Kette C aus einer der in Definition 1.1.3 definierten Familien von Ketten, so zeigt der folgende Satz, daß b^G definiert ist für alle Blöcke b von H.

2.6.4 Satz
Es sei G eine endliche Gruppe, C eine p-Kette von G und $N_G(C)$ der Kettennormalisator von C. Dann gilt: Ist b ein p-Block von $N_G(C)$, so ist b^G definiert.

Beweis: siehe [KR89, Lemma 3.2]. ∎

Zur Verifikation der Dade-Vermutung ist folgender Spezialfall des Dritten Brauerschen Hauptsatzes über Blöcke nützlich:

2.6.5 Satz
Es sei G eine endliche Gruppe, P ein p-Normalteiler von G und $C \in \mathcal{E}(G|P)$ eine elementare p-Kette. Es sei ferner $N := N_G(C)$ der zugehörige Kettennormalisator und b ein Block von N. Dann gilt: b ist der Hauptblock von N genau dann, wenn b^G der Hauptblock von G ist.

Beweis: Es sei $D := \delta(b)$ eine Defektgruppe von b. Nach dem Dritten Brauerschen Hauptsatz über Blöcke [Fei82, Theorem V.6.2], genügt es zu zeigen, daß

$$C_G(D) \subseteq N \tag{2.15}$$

gilt. Es sei $C : P = P_0 < P_1 < \cdots < P_n$. Nach Definition von $\mathcal{E}(G|P)$ ist der Faktor P_n/P elementar-abelsch. Insbesondere gilt $P_i \trianglelefteq P_n$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Also ist P_n Untergruppe von $N_G(P_i)$ für alle i. Also gilt sogar:

$$P_n \trianglelefteq N_G(C)\ . \tag{2.16}$$

Nun ist bekanntlich (siehe z.B. [Fei82, Korollar III.6.9]) jeder p-Normalteiler von N in jeder Defektgruppe eines jeden Blockes von N enthalten. Wegen (2.16) ist also $P_n \subseteq D$.

Es sei nun $x \in C_G(D)$. Dann zentralisiert x die Untergruppe D und damit natürlich auch $P_i \subseteq P_n \subseteq D$ für $i = 0, \ldots, n$. Insbesondere folgt $x \in N_G(C)$, womit (2.15) gezeigt ist.

■

2.6.6 Bemerkung
Wegen $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G|\{1\})$ gilt die Aussage von Satz 2.6.5 auch für alle Ketten $C \in \mathcal{E}(G)$.

Kapitel 3

Die gewöhnlichen Dade-Vermutungen

Nachdem in den ersten beiden Kapiteln die Grundlagen bereitgestellt wurden, die zur Formulierung der Dade-Vermutungen benötigt werden, werden in diesem Kapitel die beiden einfachsten Versionen der Dade-Vermutungen vorgestellt, die gewöhnliche und die invariante Vermutung.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst die gewöhnliche Dade-Vermutung behandelt. Diese Vermutung stellt einen Zusammenhang her zwischen der Anzahl der irreduziblen Charaktere einer endlichen Gruppe G, die in einem p-Block B liegen und Defekt d besitzen, und der Anzahl gewisser irreduzibler Charaktere p-lokaler Untergruppen von G. Um den Nachweis seiner gewöhnlichen Vermutung auf den Fall zu reduzieren, daß G eine einfache Gruppe ist, hat Dade seine Vermutung dahingehend verallgemeinert, daß er G als Normalteiler in eine Erweiterungsgruppe E einbettet. Er gelangt so zu einer allgemeineren Version seiner Vermutung, der sogenannten invarianten Dade-Vermutung, die in Abschnitt 3.2 vorgestellt wird.

3.1 Die gewöhnliche Dade-Vermutung

Die gewöhnliche Dade-Vermutung macht Aussagen über die Anzahlen irreduzibler Charaktere in Blöcken gewisser Kettennormalisatoren. Diese Charakteranzahlen sollen nun definiert werden.

3.1.1 Definition
Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, $d \in \mathbb{Z}$ und B ein p-Block von G. Für eine p-Kette C von G sei $\mathrm{Irr}(C, B, d)$ die Menge aller irreduziblen Charaktere ψ von $N_G(C)$ mit

$$b^G = B \text{ und } d(\psi) = d,$$

wobei b den p-Block von $N_G(C)$ bezeichne, in dem ψ liegt. (Man beachte, daß b^G definiert ist nach Satz 2.6.4.) Es sei ferner

$$k(C, B, d) := |\mathrm{Irr}(C, B, d)|\,. \tag{3.1}$$

Man stellt leicht fest, daß die in Definition 3.1.1 definierten Charakteranzahlen nicht von C, sondern vielmehr nur von der Konjugiertenklasse der Kette C abhängen. Dies wird in folgendem Lemma präzisiert:

3.1.2 Lemma
Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, $d \in \mathbb{Z}$ und B ein p-Block von G. Es sei C eine p-Kette von G und C^g mit $g \in G$ eine zu C in G konjugierte Kette (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Definition 1.1.1). Dann gilt:

$$k(C, B, d) = k(C^g, B, d). \tag{3.2}$$

Beweis: Es sei (K, R, F) ein p-modulares System und $H := N_G(C)$. Dann ist $N_G(C^g) = N_G(C)^g = H^g$. Offensichtlich wird durch

$$\psi \longmapsto \psi^g$$

eine Bijektion

$$\mathrm{Irr}(N_G(C)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(N_G(C^g)) \tag{3.3}$$

definiert. Hierbei bezeichne ψ^g den zu ψ konjugierten Charakter, der durch

$$\psi^g(x) := \psi(x^g) \tag{3.4}$$

gegeben ist. Es ist nun noch zu zeigen, daß obige Bijektion $\mathrm{Irr}(C, B, d)$ auf $\mathrm{Irr}(C^g, B, d)$ für jeden Block B und jede ganze Zahl d abbildet. Es sei $\psi \in \mathrm{Irr}(H)$. Dann liegt ψ in genau einem Block b von H. Das Blockidempotent von b sei mit e_b bezeichnet. Da die Konjugation mit g einen Isomorphismus $\varepsilon : Z(RH) \longrightarrow Z(RH^g)$ induziert, gibt es genau einen Block b' von H^g, dessen zugehöriges Blockidempotent $e_b^g = g^{-1}e_b g$ ist. b' heißt auch der zu b konjugierte Block b^g. Offensichtlich liegt dann ψ^g in $b' = b^g$. Für die zugehörigen zentralen Charaktere und Projektionen gemäß Abschnitt 2.6 gilt dann:

$$\omega_{b'} = \omega_b \circ \varepsilon^{-1} \text{ und } s_{H^g} = \varepsilon \circ s_H\ .$$

Hieraus folgt:

$$\omega_{b'} \circ s_{H^g} = \omega_b \circ \varepsilon^{-1} \circ \varepsilon \circ s_H = \omega_b \circ s_H \ .$$

Also induziert b einen Block B genau dann, wenn b' den Block B induziert. Da trivialerweise $d(\psi) = d(\psi^g)$ gilt, folgt also: ψ hat genau dann Defekt d und liegt in einem Block, der den Block B induziert, wenn ψ^g Defekt d hat und in einem Block liegt, der B induziert. Somit bildet die durch (3.3) gegebene Bijektion $\mathrm{Irr}(C, B, d)$ auf $\mathrm{Irr}(C^g, B, d)$ ab, was zu zeigen war. ■

Aus Lemma 3.1.2 folgt die Unabhängigkeit der alternierenden Summen in der gewöhnlichen Dade-Vermutung von der Wahl des Vertretersystems $\mathcal{R}(G)/G$:

3.1.3 Vermutung (Die gewöhnliche Dade-Vermutung)
Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und $O_p(G) = \{1\}$. Es seien ferner B ein p-Block von G mit $d(B) > 0$ und $d \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} k(C, B, d) = 0 \ . \tag{3.5}$$

Wir sagen: „Die gewöhnliche Vermutung gilt für eine endliche Gruppe G", wenn sie für alle möglichen Wahlen von p, B und d gilt.

Dade zeigt in [Dad92], daß seine gewöhnliche Vermutung 3.1.3 im allgemeinen falsch ist, wenn man eine der beiden Voraussetzungen $O_p(G) = \{1\}$ oder $d(B) > 0$ wegläßt. Das folgende Lemma besagt, daß in obiger Version der gewöhnlichen Dade-Vermutung die alternierende Summe auch über die elementaren p-Ketten erstreckt werden darf:

3.1.4 Lemma
Unter den Voraussetzungen von Vermutung 3.1.3 ist die Gleichung (3.5) äquivalent zu

$$\sum_{C \in \mathcal{E}(G)/G} (-1)^{|C|} k(C, B, d) = 0 \ ,$$

wobei auch diese alternierende Summe unabhängig von der Wahl des Vertretersystems $\mathcal{E}(G)/G$ ist.

Beweis: folgt sofort aus Satz 1.3.1 (mit $E = G$) und Lemma 3.1.2. ■

3.2 Die invariante Dade-Vermutung

Um den Nachweis seiner gewöhnlichen Vermutung 3.1.3 auf den Fall zu reduzieren, daß G einfach ist, hat Dade seine gewöhnliche Vermutung dahingehend verallgemeinert, daß G als Normalteiler in eine Erweiterungsgruppe E eingebettet ist.

Wie in Abschnitt 1.1 beschrieben, operiert dann auch E auf den Familien $\mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{R}(G)$ per Konjugation. Es sei C eine p-Kette aus einer dieser Familien und $N_G(C)$ bzw. $N_E(C)$ ihr Normalisator in G bzw. in E. Offensichtlich ist $N_G(C)$ normal in $N_E(C)$. Dann operiert bekanntlich $N_E(C)$ auf den irreduziblen Charakteren von $N_G(C)$ per Konjugation (d.h. es wird jedem Element $g \in N_E(C)$ und jedem $\psi \in \mathrm{Irr}(N_G(C))$ der konjugierte Charakter ψ^g zugeordnet, der durch $\psi^g(x) := \psi(x^g)$ für $x \in N_G(C)$ definiert ist). Somit besitzt jeder irreduzible Charakter $\psi \in \mathrm{Irr}(N_G(C))$ einen Stabilisator $T(\psi)$ in $N_E(C)$. Es sei

$$\iota_C : \begin{array}{ccc} N_E(C) & \longrightarrow & E/G \\ x & \longmapsto & xG \end{array} .$$

Hiermit läßt sich der Begriff des Trägheitsfaktors von ψ definieren:

3.2.1 Definition (Trägheitsfaktoren)
Es seien E eine endliche Gruppe, $G \trianglelefteq E$, C eine p-Kette von G mit Kettennormalisator $N_G(C)$ und $\psi \in \mathrm{Irr}(N_G(C))$. Dann heißt die oben konstruierte Untergruppe

$$\iota_C(T(\psi)) \leq E/G$$

der Trägheitsfaktor von ψ in E/G.

Die in der gewöhnlichen Vermutung auftretenden Charakteranzahlen $k(C, B, d)$ lassen sich nun weiter verfeinern:

3.2.2 Definition
Es seien E eine endliche Gruppe, $G \trianglelefteq E$, p eine Primzahl, $d \in \mathbb{Z}$, B ein p-Block von G und $H \leq E/G$. Für eine p-Kette C von G sei $\mathrm{Irr}(C, B, d, H)$ die Menge aller irreduziblen Charaktere ψ von $N_G(C)$ mit

$$b^G = B\ ,\ d(\psi) = d \text{ und Trägheitsfaktor } H,$$

wobei b den p-Block von $N_G(C)$ bezeichne, in dem ψ liegt. (Man beachte, daß b^G definiert ist nach Satz 2.6.4.) Es sei ferner:

$$k(C, B, d, H) := |\mathrm{Irr}(C, B, d, H)|\,. \tag{3.6}$$

Für die so definierten Charakteranzahlen gilt folgendes Analogon zu Lemma 3.1.2:

3.2.3 Lemma
Es seien E eine endliche Gruppe, $G \trianglelefteq E$, p eine Primzahl, $d \in \mathbb{Z}$, B ein p-Block von G und $H \leq E/G$. Es sei C eine p-Kette von G und C^g mit $g \in G$ eine zu C in G konjugierte Kette (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Definition 1.1.1). Dann gilt:

$$k(C, B, d, H) = k(C^g, B, d, H). \tag{3.7}$$

Beweis: Es sei

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(N_G(C)) & \longrightarrow & \mathrm{Irr}(N_G(C^g)) \\ \psi & \longmapsto & \psi^g \end{array}$$

die Bijektion aus dem Beweis von Lemma 3.1.2. Wie aus dem Beweis von Lemma 3.1.2 hervorgeht, bildet diese Bijektion $\mathrm{Irr}(C, B, d)$ auf $\mathrm{Irr}(C^g, B, d)$ ab für jeden Block B von G und jede ganze Zahl d. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß ψ und ψ^g den gleichen Trägheitsfaktor besitzen. Es seien $T(\psi)$ der Stabilisator von ψ in $N_E(C)$ und $T(\psi^g)$ der Stabilisator von ψ^g in $N_E(C^g)$. Dann gilt offenbar $T(\psi^g) = T(\psi)^g$. Dann gilt für die Trägheitsfaktoren:

$$\iota_{C^g}\left(T(\psi^g)\right) = T(\psi)^g G/G = T(\psi)G/G = \iota_C\left(T(\psi)\right) \ .$$

Hier gilt das zweite Gleichheitszeichen, da $g \in G$ ist. Also haben ψ und ψ^g die gleichen Trägheitsfaktoren, und dies war zu zeigen. ■

Aus Lemma 3.2.3 folgt, daß die alternierenden Summen in Dades invarianter Vermutung unabhängig von der Wahl des Vertretersystems $\mathcal{R}(G)/G$ sind:

3.2.4 Vermutung (Die invariante Dade-Vermutung)
Es seien E eine endliche Gruppe, $G \trianglelefteq E$, p eine Primzahl und $O_p(G) = \{1\}$. Es seien ferner B ein p-Block von G mit $d(B) > 0$, $d \in \mathbb{Z}$ und $H \leq E/G$. Dann gilt:

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} k(C, B, d, H) = 0 \ . \tag{3.8}$$

Wir sagen: ,,Die invariante Vermutung gilt für das Paar (G, E)", wenn sie für alle möglichen Wahlen von p, B, d und H gilt.

3.2.5 Bemerkung
(a) Aus Satz 1.3.1 folgt, daß auch in der invarianten Vermutung $\mathcal{R}(G)$ durch $\mathcal{E}(G)$ ersetzt werden darf. Es genügt also, die invariante Vermutung 3.2.4 für elementare p-Ketten nachzuweisen.

(b) Für $E = G$ geht die invariante Vermutung 3.2.4 offenbar in die gewöhnliche Vermutung 3.1.3 über und enthält diese somit als Spezialfall.

(c) Ist G einfach und nicht abelsch, so genügt es zum Nachweis der invarianten Vermutung 3.2.4 nach [Dad97], für E die Automorphismengruppe $E = \mathrm{Aut}(G)$ zu betrachten.

Kapitel 4

Darstellungstheorie für verschränkte Gruppenalgebren

Um den Nachweis seiner gewöhnlichen Vermutung 3.1.3 auf den Fall zu reduzieren, daß G einfach ist, hat Dade seine gewöhnliche und seine invariante Vermutung in [Dad94] und [Dad97] zu projektiven Versionen verallgemeinert. Während die gewöhnliche und die invariante Vermutung Aussagen über gewöhnliche irreduzible Charaktere von G machen, werden in den projektiven Dade-Vermutungen projektive Charaktere von G behandelt.

Projektive Charaktere von G können als gewöhnliche Charaktere von verschränkten Gruppenalgebren von G aufgefaßt werden. Zur Formulierung seiner projektiven Vermutungen stellt Dade daher in [Dad94] eine Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren vor, die in weiten Teilen analog zur Blocktheorie für gewöhnliche Gruppenalgebren ist. Die zur Formulierung der projektiven Vermutungen benötigten Resultate der Dadeschen Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren sollen in diesem Kapitel kurz zusammengestellt werden.

4.1 Verschränkte Gruppenalgebren

Die projektiven Dade-Vermutungen machen Aussagen über projektive Darstellungen von endlichen Gruppen. Ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung solcher Darstellungen ist der Begriff der verschränkten Gruppenalgebra, der nun eingeführt werden soll.

In diesem Abschnitt seien stets G eine endliche Gruppe und K ein Körper.

Unter einem K^*-Faktorensystem versteht man eine Abbildung

$$\alpha : G \times G \longrightarrow K^* \ ,$$

wobei K^* die Einheitengruppe von K bezeichne, mit der Eigenschaft:

$$\alpha(y,z)\alpha(xy,z)^{-1}\alpha(x,yz)\alpha(x,y)^{-1} = 1 \tag{4.1}$$

für alle x, y, $z \in G$. Mit diesem Begriff läßt sich nun definieren:

4.1.1 Definition (verschränkte Gruppenalgebren)
Es sei α ein K^*-Faktorensystem. Es sei ferner $K^\alpha[G]$ der K-Vektorraum mit Basis G. Dann wird $K^\alpha[G]$ zu einer (assoziativen) K-Algebra durch:

$$g \cdot h := \alpha(g,h)gh \tag{4.2}$$

für g, $h \in G$. Hierbei bedeute gh das übliche Produkt der beiden Elemente g und h in der Gruppe G. Das neu definierte Produkt von g und h sei stets mit einem Punkt $g \cdot h$ bezeichnet. Die K-Algebra $K^\alpha[G]$ heißt verschränkte Gruppenalgebra von G über K zum Faktorensystem α.

4.1.2 Bemerkung

(a) Ist α das triviale Faktorensystem, d.h. $\alpha(x,y) = 1$ für alle x, $y \in G$, so ist offensichtlich $K^\alpha[G]$ isomorph zur gewöhnlichen Gruppenalgebra KG.

(b) Die Einschränkungen der irreduziblen Darstellungen von $K^\alpha[G]$ auf die Basis G sind bekanntlich genau die projektiven irreduziblen Darstellungen von G zum Faktorensystem α. Verschränkte Gruppenalgebren sind daher ein wichtiges Hilfsmittel zum Studium projektiver Darstellungen von G.

Aus einer verschränkten Gruppenalgebra einer Gruppe G lassen sich in einfacher Weise verschränkte Gruppenalgebren von Untergruppen H von G konstruieren:

4.1.3 Definition (Einschränkung verschränkter Gruppenalgebren)
Es sei A_K eine verschränkte Gruppenalgebra von G über K zu einem Faktorensystem α, und H eine Untergruppe von G. Es sei ferner β die Einschränkung von α auf $H \times H$. Dann ist die Unteralgebra $A_K[H] := K^\beta[H]$ eine verschränkte Gruppenalgebra von H über K zum Faktorensystem β. Dann heißt $A_K[H]$ die Einschränkung von A_K auf die Untergruppe H.

In der folgenden Definition wird der Begriff des Zerfällungskörpers einer Gruppe, wie er in Definition 2.2.2 eingeführt wurde, auf verschränkte Gruppenalgebren verallgemeinert:

4.1.4 Definition (total-zerfallende verschränkte Gruppenalgebren)
Es sei A_K eine verschränkte Gruppenalgebra von G über K. Dann heißt A_K total-zerfallend genau dann, wenn K Zerfällungskörper ist für $A_K[H]$ für alle Untergruppen H von G.

4.2 Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren

In diesem Abschnitt soll Dades Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren kurz skizziert werden. Diese Theorie verallgemeinert die Blocktheorie für gewöhnliche irreduzible Charaktere einer Gruppe, wie sie in Kapitel 2 dargelegt wurde, zu einer weitgehend analogen Theorie für irreduzible projektive Charaktere endlicher Gruppen. Mit Hilfe dieser allgemeineren Theorie lassen sich dann die projektiven Dade-Vermutungen formulieren.

Es sei in diesem Abschnitt stets die folgende Voraussetzung erfüllt:

4.2.1 Voraussetzung
Es sei

- p *eine Primzahl,*
- (K, R, F) *ein* p*-modulares System,*
- G *eine endliche Gruppe und*
- A_K *eine total-zerfallende verschränkte Gruppenalgebra von* G *über* K*.*

In der Blocktheorie für gewöhnliche Gruppenalgebren KG über dem Körper K waren die Blöcke in Definition 2.4.1 definiert worden als die Blöcke der Gruppenalgebra RG. Für die verschränkte Gruppenalgebra A_K hat Dade ein geeignetes Analogon zu RG gefunden: Dade konstruiert in A_K eine sogenannte maximale G-graduierte R-Unterordnung. Unter einer G-graduierten R-Unterordnung ist hierbei folgendes zu verstehen:

4.2.2 Definition (graduierte Unterordnungen)
Es sei A eine R-Unterordnung von A_K, d.h. es sei A eine R-Unteralgebra von A_K, die als R-Modul frei ist und eine endliche R-Basis besitzt. A heißt eine G-graduierte R-Unterordnung A von A_K, wenn A eine Zerlegung

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

in eine direkte Summe von R-Untermoduln A_g besitzt mit $A_g = A \cap Kg$ für alle $g \in G$. Die direkten Summanden A_g heißen die Komponenten von A.

Jedes Element aus A_K, insbesondere jedes Element x aus einer G-graduierten R-Unterordnung A von A_K, läßt sich eindeutig schreiben in der Form

$$x = \sum_{g \in G} x_g g$$

mit $x_g \in K$ für alle $g \in G$. Die Definition der G-graduierten Unterordnung besagt gerade, daß mit $x \in A$ auch alle ,,Komponenten" $x_g g$ von x in A liegen.

4.2.3 Bemerkung

(a) Aus der Definition 4.2.2 folgt unmittelbar: Ist A eine G-graduierte R-Unteralgebra von A_K, so gilt für die Komponenten A_g:

$$A_g \cdot A_h \subseteq A_{gh}$$

für alle $g, h \in G$.

(b) Es sei A eine G-graduierte R-Unteralgebra von A_K mit den Komponenten A_g, $g \in G$, und H eine Untergruppe von G. Aus Teil (a) folgt dann:

$$A[H] := \bigoplus_{h \in H} A_h$$

ist eine H-graduierte R-Unterordnung von $A_K[H]$ mit den Komponenten A_h, $h \in H$.

Dade beweist in [Dad94] die Existenz einer ausgezeichneten G-graduierten R-Unterordnung von A_K:

4.2.4 Satz (Existenz der maximalen G-graduierten R-Unterordnung)
Unter der Voraussetzung 4.2.1 existiert eine G-graduierte R-Unterordnung A von A_K, die jede G-graduierte R-Unterordnung von A_K enthält. Das K-Erzeugnis von A ist gleich A_K, und ist

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

die Summenzerlegung von A gemäß Definition 4.2.2, so gilt $A_g \cap A^* \neq \emptyset$ für alle $g \in G$, d.h. jede Komponente A_g von A enthält mindestens eine Einheit aus A.

Beweis: siehe [Dad94, Theorem 7.8]. ■

4.2.5 Bemerkung
Besitzt A_K das triviale Faktorensystem, d.h. stimmt A_K mit der gewöhnlichen Gruppenalgebra KG überein, so folgt aus Dades Konstruktion der maximalen G-graduierten R-Unterordnung A von A_K, daß in diesem Fall $A = RG$ ist (vergleiche [Dad94, Beweis zu Lemma 7.5]). Für das triviale Faktorensystem stimmt also die von Dade entwickelte Blocktheorie mit der „gewöhnlichen" Blocktheorie überein. Dades Blocktheorie für verschränkte Gruppenalgebren kann also als eine Verallgemeinerung der Blocktheorie für gewöhnliche irreduzible Charaktere zu einer Blocktheorie für irreduzible projektive Charaktere aufgefaßt werden.

Von nun an sei A stets die eindeutig bestimmte maximale R-Unterordnung von A_K gemäß Satz 4.2.4. Um die in Abschnitt 2.3 entwickelte Blocktheorie für Algebren hier anwenden zu können, ist zu überprüfen, ob die Voraussetzung 2.3.1 erfüllt ist:

Da die Voraussetzung 4.2.1 erfüllt ist und das K-Erzeugnis von A nach Satz 4.2.4 gleich A_K ist, ist nur noch nachzuweisen, daß A_K endlich-dimensional, zerfallend und halbeinfach ist. Die Endlichdimensionalität von A_K ist offensichtlich. Daß A_K zerfallend und halbeinfach ist, zeigt Dade in [Dad94, Folgerung (7.2)]. Somit ist auch hier die Voraussetzung 2.3.1 erfüllt, so daß die gesamte in Abschnitt 2.3 entwickelte Blocktheorie auch für die verschränkte Gruppenalgebra A_K gültig ist.

4.2.6 Definition (p-Blöcke)
Es sei die Voraussetzung 4.2.1 erfüllt und A die maximale G-graduierte R-Unterordnung von A_K. Dann nennt man die Blöcke von A (im Sinne von Definition 2.1.3) auch die p-Blöcke von A_K.

Obwohl die p-Blöcke von der Wahl des Bewertungsrings R abhängen, bringt Dade dies in der Bezeichnung „p-Blöcke" nicht zum Ausdruck. Dies hat folgenden Grund: Nach [Dad99] kann man zeigen, daß die Verteilung der irreduziblen Charaktere von A_K auf die p-Blöcke nicht von der Wahl des Bewertungsrings R abhängt. In diesem Sinne sind also die p-Blöcke unabhängig von der Wahl von R.

Da verschränkte Gruppenalgebren – wie oben erwähnt – die Voraussetzung 2.3.1 erfüllen, bleibt auch Satz 2.3.7 über die Charakterisierung der Blöcke mittels zentraler Charaktere für verschränkte Gruppenalgebren gültig.

Wichtig für den Aufbau einer Blocktheorie ist es im Hinblick auf ein Analogon zur Brauer-Korrespondenz, einen Zusammenhang herzustellen zwischen den Blöcken der verschränkten Gruppenalgebra A_K und ihren Einschränkungen $A_K[H]$ auf Untergruppen H von G. Dieser Zusammenhang wird durch folgenden Satz gegeben:

4.2.7 Satz
Unter der Voraussetzung 4.2.1 sei A die eindeutig bestimmte maximale G-graduierte R-Unterordnung von A_K und H eine Untergruppe von G. Es sei $A[H]$ die Einschränkung von A auf H gemäß Bemerkung 4.2.3 (b). Dann ist $A[H]$ die eindeutig bestimmte maximale H-graduierte R-Unterordnung von $A_K[H]$.

Beweis: siehe [Dad94, Folgerung (10.1)]. ■

Aus Satz 4.2.7 folgt insbesondere, daß die p-Blöcke von $A_K[H]$ (im Sinne von Definition 4.2.6) genau die Blöcke von $A[H]$ sind.

4.3 Defekte und Defektgruppen

Die Begriffe des Defekts eines irreduziblen Charakters und der Defektgruppe eines Blockes einer gewöhnlichen Gruppenalgebra besitzen Analoga in der Darstellungstheorie von verschränkten Gruppenalgebren, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden sollen.

Zusätzlich zu Voraussetzung 4.2.1 bezeichne A in diesem Abschnitt die maximale G-graduierte R-Unterordnung von A_K, d.h. es sei in diesem Abschnitt stets folgende Voraussetzung erfüllt:

4.3.1 Voraussetzung
Es sei

- *p eine Primzahl,*
- *(K, R, F) ein p-modulares System,*
- *G eine endliche Gruppe,*
- *A_K eine total-zerfallende verschränkte Gruppenalgebra von G über K und*

- *A die maximale G-graduierte R-Unterordnung von A_K.*

Der Defekt eines irreduziblen Charakters von A_K wird völlig analog zum Defekt eines gewöhnlichen irreduziblen Charakters von G definiert:

4.3.2 Definition (Defekte von irreduziblen projektiven Charakteren)
Unter der Voraussetzung 4.3.1 sei χ ein irreduzibler Charakter von A_K. Dann heißt die Zahl

$$d(\chi) := \nu_p(|G|) - \nu_p(\chi(1))$$

der Defekt von χ.

4.3.3 Bemerkung
Bekanntlich ist für jeden irreduziblen projektiven Charakter χ von G der Charaktergrad $\chi(1)$ ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ (vgl. [Isa76, Korollar (11.18)]). Somit ist der Defekt $d(\chi)$ stets eine nichtnegative ganze Zahl.

Der Begriff des Defekts eines Blockes einer verschränkten Gruppenalgebra wird hingegen *nicht* als das Maximum der Defekte seiner Charaktere erklärt. Der Defekt eines Blockes einer verschränkten Gruppenalgebra wird vielmehr über die Ordnung der Defektgruppe des Blockes eingeführt, die nun definiert werden soll:

Nach Satz 4.2.4 ist $A_g \cap A^* \neq \emptyset$ für alle $g \in G$. Man kann somit zu jedem $g \in G$ ein $u_g \in A_g \cap A^*$ wählen. Dann operiert G auf A per Konjugation durch:

$$x^g := u_g^{-1} \cdot x \cdot u_g \tag{4.3}$$

für $x \in A$ und $g \in G$. Es sei H eine Untergruppe von G und $\{g_1, \ldots, g_n\}$ eine Transversale von H in G. Mit Hilfe der Operation (4.3) per Konjugation lassen sich dann der Invariantenraum

$$\mathrm{Inv}_H(A) := \{x \in A \mid x^h = x \text{ für alle } h \in H\}$$

und die relative H-Spur

$$\mathrm{Tr}_H^G : \begin{array}{ccc} \mathrm{Inv}_H(A) & \longrightarrow & \mathrm{Inv}_G(A) \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x^{g_i} \end{array}$$

analog zu (2.9) bzw. (2.10) aus Kapitel 2 definieren. Die Defektgruppen von Blöcken kann man nun analog zu Definition 2.5.2 einführen:

4.3.4 Definition (Defektgruppen von Blöcken)
Unter der Voraussetzung 4.3.1 sei B ein p-Block von A_K und e das zu B gehörige Blockidempotent in A. Dann heißt eine Untergruppe H von G, die minimal ist hinsichtlich der Eigenschaft

$$e \in \mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{Inv}_H(A)) ,$$

eine Defektgruppe des Blockes B. Eine Defektgruppe von B werde im folgenden stets mit $\delta(B)$ bezeichnet.

4.3.5 Bemerkung
Aus [Gre68, Theorem 4] folgt wiederum, daß die Defektgruppen eines Blockes B zueinander konjugiert sind und p-Untergruppen von G sind. Ist $A_K = KG$ und somit $A = RG$, so stimmt offensichtlich Definition 4.3.4 mit Definition 2.5.2 überein.

Dade definiert den Defekt eines Blockes über die Ordnung der Defektgruppe des Blockes:

4.3.6 Definition (Defekt eines Blockes)
Unter der Voraussetzung 4.3.1 sei B ein p-Block von A_K und $\delta(B)$ seine Defektgruppe. Nach Bemerkung 4.3.5 ist $\delta(B)$ eine p-Untergruppe von G, d.h. die Ordnung von $\delta(B)$ läßt sich schreiben als

$$|\delta(B)| = p^d$$

mit einer nichtnegativen ganzen Zahl d. Dann heißt $d(B) := d$ der Defekt des Blockes B.

4.4 Brauer-Korrespondenz

In diesem Abschnitt soll die Brauer-Korrespondenz, wie sie bereits in Abschnitt 2.6 für gewöhnliche Gruppenalgebren eingeführt wurde, auf verschränkte Gruppenalgebren übertragen werden.

Zusätzlich zu Voraussetzung 4.3.1 sei in diesem Abschnitt H eine Untergruppe von G, d.h. es sei in diesem Abschnitt stets folgende Voraussetzung erfüllt:

4.4.1 Voraussetzung
Es sei

- p *eine Primzahl,*
- (K, R, F) *ein* p*-modulares System,*
- G *eine endliche Gruppe,*

- *A_K eine total-zerfallende verschränkte Gruppenalgebra von G über K,*
- *A die maximale G-graduierte R-Unterordnung von A_K und*
- *H eine Untergruppe von G.*

Es soll zunächst ein Analogon zur Abbildung s_H aus Abschnitt 2.6 konstruiert werden. Es sei

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

die Zerlegung von A in seine Komponenten gemäß Definition 4.2.2. Dann ist die entsprechende Zerlegung von $A[H]$ in seine Komponenten per Definition (siehe Bemerkung 4.2.3) gegeben durch

$$A[H] = \bigoplus_{h \in H} A_h.$$

Es sei

$$pr_H^G : A \longrightarrow A[H]$$

die kanonische Projektion von A auf $A[H]$. Dann gilt:

4.4.2 Satz
Es sei die Voraussetzung 4.4.1 erfüllt und $pr_H^G : A \longrightarrow A[H]$ die kanonische Projektion. Dann bildet pr_H^G das Zentrum von A in das Zentrum von $A[H]$ ab, d.h. es gilt:

$$pr_H^G(Z(A)) \subseteq Z(A[H]).$$

Durch die Einschränkung $s_H := pr_H^G \mid_{Z(A)}$ wird also eine R-lineare Abbildung

$$s_H : Z(A) \longrightarrow Z(A[H])$$

definiert.

Beweis: siehe [Dad94, Proposition 10.4]. ■

Offensichtlich induziert die so definierte R-lineare Abbildung s_H in kanonischer Weise eine F-lineare Abbildung

$$\bar{s}_H : Z(\bar{A}) \longrightarrow Z(\overline{A[H]}) \; .$$

Nun kann man analog zu Abschnitt 2.6 vorgehen:

Es sei b ein p-Block von $A_K[H]$ mit zentralem Charakter $\bar{\omega}_b : Z(\overline{A[H]}) \longrightarrow F$ (im Sinne von Satz 2.3.7), dann ist die Komposition

$$\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H : Z(\bar{A}) \longrightarrow F \tag{4.4}$$

eine F-lineare Abbildung.

4.4.3 Definition (Brauer-Korrespondent)
Ist die Abbildung $\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H$ ein von Null verschiedener F-Algebrenhomomorphismus, so existiert nach Satz 2.3.7 genau ein p-Block B von A_K mit $\bar{\omega}_b \circ \bar{s}_H = \bar{\omega}_B$. Man schreibt $b^{A_K} := B$ und sagt: „b^{A_K} ist definiert". b^{A_K} heißt der Brauerkorrespondent von b.

Besonders wichtig für die Formulierung der projektiven Dade-Vermutungen ist folgendes Analogon zu Satz 2.6.4:

4.4.4 Satz
Es sei die Voraussetzung 4.4.1 erfüllt und C eine p-Kette von G mit Kettennormalisator $N_G(C)$. Dann ist für jeden p-Block b von $A_K[N_G(C)]$ der Brauerkorrespondent b^{A_K} definiert.

Beweis: siehe [Dad94, Proposition 10.14]. ■

Damit sind alle Hilfsmittel zur Formulierung der projektiven Dade-Vermutungen bereitgestellt.

Kapitel 5

Die projektiven Dade-Vermutungen

In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Grundlagen bereitgestellt, mit Hilfe derer sich die projektiven Dade-Vermutungen formulieren lassen. Es werden in diesem Kapitel zunächst zwei Versionen vorgestellt, wie Dade sie in [Dad94] ausgesprochen hat: die projektive Vermutung und die projektiv-invariante Vermutung.

Die projektive Dade-Vermutung wird in Abschnitt 5.1 in der Sprache der verschränkten Gruppenalgebren angegeben. Diese Variante der Vermutung wird dann in Abschnitt 5.2 auf eine Version zurückgeführt, die auf endlichen Überlagerungsgruppen basiert. Eine endliche Überlagerungsgruppe einer endlichen Gruppe G ist eine Gruppe G^*, die einen zyklischen, zentralen Normalteiler Z besitzt, der in der Kommutatorgruppe $(G^*)'$ von G^* enthalten ist, der isomorph zu einer Faktorgruppe des Schurmultiplikators von G ist und für den der Faktor G^*/Z isomorph zu G ist. Die Version der projektiven Dade-Vermutung für Überlagerungsgruppen ist häufig zur rechnerischen Verifikation der projektiven Vermutung besser geeignet und wird beim Nachweis der Dade-Vermutungen für die sporadische Suzuki-Gruppe in Kapitel 6 eine wichtige Rolle spielen.

In Abschnitt 5.3 wird eine Verallgemeinerung der projektiven Vermutung, die sogenannte projektiv-invariante Dade-Vermutung, behandelt, die gleich in einer Formulierung für endliche Überlagerungsgruppen vorgestellt wird. Die projektiv-invariante Dade-Vermutung ist die stärkste der Dade-Vermutungen, die in dieser Arbeit behandelt werden, die gewöhnliche, invariante und projektive Vermutung sind Spezialfälle. Die projektiv-invariante Vermutung ist diejenige der Dade-Vermutungen, die in Kapitel 6 für die sporadische einfache Suzuki-Gruppe verifiziert wird.

5.1 Die projektive Dade-Vermutung

Die projektive Dade-Vermutung verallgemeinert die Aussagen der gewöhnlichen Vermutung 3.1.3 über Blöcke von G zu Aussagen über Blöcke von verschränkten Gruppenalgebren von G.

In diesem Abschnitt sei die gleiche Voraussetzung wie in Abschnitt 4.3 erfüllt, d.h. es gelte:

5.1.1 Voraussetzung
Es sei

- p *eine Primzahl,*
- (K, R, F) *ein* p*-modulares System,*
- G *eine endliche Gruppe,*
- A_K *eine total-zerfallende verschränkte Gruppenalgebra von* G *über* K *mit Faktorensystem* α *und*
- A *die maximale* G*-graduierte* R*-Unterordnung von* A_K*.*

Es sollen zunächst die Charakteranzahlen aus 3.1.1 auf verschränkte Gruppenalgebren übertragen werden:

5.1.2 Definition
Zusätzlich zu Voraussetzung 5.1.1 sei $d \in \mathbb{Z}$, B ein p-Block von A_K und C eine p-Kette von G mit Kettennormalisator $N_G(C)$. Dann sei $\mathrm{Irr}(A_K[N_G(C)], B, d)$ die Menge aller irreduziblen Charaktere ψ der verschränkten Gruppenalgebra $A_K[N_G(C)]$ mit

$$b^{A_K} = B \text{ und } d(\psi) = d,$$

wobei b den p-Block von $A_K[N_G(C)]$ bezeichne, in dem ψ liegt. (Man beachte, daß b^{A_K} definiert ist nach Satz 4.4.4.) Es sei ferner:

$$k(A_K[N_G(C)], B, d) := |Irr(A_K[N_G(C)], B, d)|\,. \tag{5.1}$$

Man stellt leicht fest, daß die in Definition 5.1.2 definierten Charakteranzahlen nicht von C, sondern vielmehr nur von der Konjugiertenklasse der Kette C abhängen. Es gilt nämlich folgendes Analogon zu Lemma 3.1.2:

5.1.3 Lemma
Zusätzlich zu Voraussetzung 5.1.1 seien $d \in \mathbb{Z}$, B ein p-Block von A_K und C eine p-Kette von G mit Kettennormalisator $N_G(C)$. Dann gilt für $g \in G$:

$$k(A_K[N_G(C)], B, d) = k(A_K[N_G(C^g)], B, d).$$

Beweis: Der Beweis läßt sich analog zu Lemma 3.1.2 führen. Es sei $H := N_G(C)$. Dann ist $N_G(C^g) = N_G(C)^g = H^g$. Offensichtlich wird durch

$$\psi \longmapsto \psi^g$$

eine Bijektion

$$\mathrm{Irr}(A_K[N_G(C)]) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(A_K[N_G(C^g)]) \tag{5.2}$$

definiert. Hierbei bezeichne ψ^g den zu ψ konjugierten Charakter, der durch

$$\psi^g(x) := \psi(x^g) \tag{5.3}$$

gegeben ist, wobei g auf A_K gemäß (4.3) durch Konjugation operiere. Es ist nun noch zu zeigen, daß obige Bijektion $\mathrm{Irr}(A_K[N_G(C)], B, d)$ auf $\mathrm{Irr}(A_K[N_G(C^g)], B, d)$ für jeden p-Block B und jede ganze Zahl d abbildet. Es sei $\psi \in \mathrm{Irr}(A_K[H])$. Dann liegt ψ in genau einem p-Block b von $A_K[H]$. Das Blockidempotent von b sei mit e_b bezeichnet. Da die Konjugation mit g einen Isomorphismus $\varepsilon : Z(A[H]) \longrightarrow Z(A[H^g])$ der Zentren der zu $A_K[H]$ bzw. $A_K[H^g]$ gehörigen maximalen R-Unterordnungen induziert, gibt es genau einen p-Block b' von $A_K[H^g]$, dessen zugehöriges Blockidempotent $(e_b)^g$ ist. b' heißt auch der zu b konjugierte p-Block b^g. Offensichtlich liegt dann ψ^g in $b' = b^g$. Für die zugehörigen zentralen Charaktere und Projektionen gemäß Abschnitt 4.4 gilt dann:

$$\omega_{b'} = \omega_b \circ \varepsilon^{-1} \text{ und } s_{H^g} = \varepsilon \circ s_H \ .$$

Hieraus folgt:

$$\omega_{b'} \circ s_{H^g} = \omega_b \circ \varepsilon^{-1} \circ \varepsilon \circ s_H = \omega_b \circ s_H \ .$$

Also induziert b einen p-Block B genau dann, wenn b' den p-Block B induziert. Da trivialerweise $d(\psi) = d(\psi^g)$ gilt, folgt also: ψ hat genau dann Defekt d und liegt in einem p-Block, der den p-Block B induziert, wenn ψ^g Defekt d hat und in einem p-Block liegt, der B induziert. Somit bildet die durch (5.2) gegebene Bijektion $\mathrm{Irr}(A_K[N_G(C)], B, d)$ auf $\mathrm{Irr}(A_K[N_G(C^g)], B, d)$ ab, was zu zeigen war. ■

Aus Lemma 5.1.3 folgt die Unabhängigkeit der alternierenden Summen in der projektiven Dade-Vermutung von der Wahl des Vertretersystems $\mathcal{R}(G)/G$:

5.1.4 Vermutung (Die projektive Dade-Vermutung)
Zusätzlich zu den Voraussetzungen 5.1.1 sei $O_p(G) = \{1\}$ und B ein p-Block von A_K mit Defekt $d(B) > 0$. Dann gilt:

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} k(A_K[N_G(C)], B, d) = 0 \tag{5.4}$$

für alle $d \in \mathbb{Z}$.

5.1.5 Bemerkung
Wählt man für die verschränkte Gruppenalgebra A_K die verschränkte Gruppenalgebra mit trivialem Faktorensystem α (d.h. $\alpha(x, y) = 1$ für alle x, $y \in G$), so ist A_K isomorph zur gewöhnlichen Gruppenalgebra KG, und die projektive Vermutung 5.1.4 geht offensichtlich über in die gewöhnliche Vermutung 3.1.3.

Analog zu den gewöhnlichen Dade-Vermutungen folgt aus Satz 1.3.1, daß in Vermutung 5.1.4 die Familie der Radikal-p-Ketten, über die summiert wird, durch die Familie der elementaren p-Ketten ersetzt werden darf:

5.1.6 Lemma
Unter den Voraussetzungen von Vermutung 5.1.4 ist die Gleichung (5.4) äquivalent zu

$$\sum_{C \in \mathcal{E}(G)/G} (-1)^{|C|} k(A_K[N_G(C)], B, d) = 0 \ .$$

Beweis: folgt sofort aus Satz 1.3.1 (mit $E = G$) und Lemma 5.1.3. ■

5.2 Reduktion auf Überlagerungsgruppen

Die im letzten Abschnitt vorgestellte Version der projektiven Dade-Vermutung ist für die rechnerische Verifikation der Vermutung nicht gut geeignet. Es soll daher in diesem Abschnitt eine zur projektiven Vermutung 5.1.4 äquivalente Form der Vermutung hergeleitet werden. Die projektive Vermutung 5.1.4 macht Aussagen über irreduzible Charaktere von verschränkten Gruppenalgebren einer Gruppe G, also Aussagen über projektive Charaktere von G. Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, diese Aussagen über irreduzible *projektive* Charaktere von G in Aussagen über irreduzible *gewöhnliche* Charaktere von endlichen Überlagerungsgruppen von G zu überführen.

Zunächst ist der oben schon erwähnte Begriff der „Überlagerungsgruppe" zu definieren. Überlagerungsgruppen sind Erweiterungsgruppen zu Schurschen Erweiterungen im Sinne der folgenden Definition:

5.2.1 Definition (Schursche Erweiterungen)
Eine Erweiterung von Gruppen

$$1 \to Z \hookrightarrow G^* \to G \to 1$$

heißt eine Schursche Erweiterung, wenn $Z \leq Z(G^*) \cap (G^*)'$ gilt. Hierbei sei $Z(G^*)$ das Zentrum von G^* und $(G^*)'$ die Kommutatorgruppe von G^*.

Die endlichen Überlagerungen sind als spezielle Schursche Erweiterungen definiert:

5.2.2 Definition (Endliche Überlagerungen)
Eine Schursche Erweiterung von endlichen Gruppen

$$1 \to Z \hookrightarrow G^* \to G \to 1$$

heißt eine endliche Überlagerung, wenn Z eine zyklische Faktorgruppe des Schurmultiplikators $M(G)$ ist. G^* heißt dann eine endliche Überlagerungsgruppe von G.

Nun soll mit der Umformulierung der projektiven Vermutung 5.1.4 begonnen werden. Hierzu sei vorausgesetzt:

5.2.3 Voraussetzung
Es sei

- *p eine Primzahl,*
- *(K, R, F) ein p-modulares System,*
- *G eine endliche Gruppe,*
- *A_K eine total-zerfallende, verschränkte Gruppenalgebra von G über K mit Faktorensystem α,*
- *die Ordnung von α in der 2-Kozykelgruppe $Z^2(G, K^*)$ gleich der Ordnung von $\bar{\alpha}$ im Schurmultiplikator $M(G)$ von G, wobei $\bar{\alpha}$ das Bild von α in $M(G)$ bezeichne,*
- *A die maximale G-graduierte R-Unterordnung von A_K.*

5.2.4 Bemerkung
Voraussetzung 5.2.3 unterscheidet sich von Voraussetzung 5.1.1 nur durch die Bedingung an die Ordnung von α. Diese Bedingung stellt jedoch für die projektive Vermutung 5.1.4 keine wesentliche Einschränkung dar. Nach [Dor71, Theorem 25.3] gibt es nämlich stets eine endliche Körpererweiterung $K' \supseteq K$ und ein Faktorensystem $\alpha' \in Z^2(G,(K')^*)$ mit $\alpha = \alpha'$ modulo $B^2(G,(K')^*)$, so daß die Ordnung von α' in $Z^2(G,(K')^*)$ gleich der Ordnung von $\bar{\alpha}$ in $M(G)$ ist. Durch die (eindeutige) Fortsetzung der Bewertung von K auf K' erhält man dann ein p-modulares System (K', R', F'). Bezeichnet $A_{K'}$ die verschränkte Gruppenalgebra von G über K' mit Faktorensystem α', so ist auch $A_{K'}$ total zerfallend und es gilt

$$k(A_K[N_G(C)], B, d) = k(A_{K'}[N_G(C)], B, d) \ .$$

(Man beachte hierbei, daß A_K bereits total zerfallend ist.) D.h. die Charakteranzahlen in Vermutung 5.1.4 bleiben beim Übergang von K zu K' erhalten. Somit ist die fünfte Bedingung aus Voraussetzung 5.2.3 keine wesentliche Einschränkung gegenüber Voraussetzung 5.1.1 in Bezug auf die projektive Vermutung.

Dade stellt in [Dad94] einige Sätze und Propositionen bereit, die im folgenden Beweis benutzt werden sollen. Diese Sätze setzen stets folgendes voraus (vergleiche [Dad94, (6.10) und (6.17)]):

5.2.5 Voraussetzung
Es sei

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G^* \xrightarrow{\eta^*} G \longrightarrow 1 \tag{5.5}$$

eine zentrale Erweiterung, K totaler Zerfällungskörper für G^* (d.h. K sei Zerfällungskörper für alle Untergruppen von G^*) und ζ ein treuer, linearer K-Charakter von Z. Es sei ferner $\mu^* : KG^* \longrightarrow A_K$ ein K-Algebrenepimorphismus mit $\mu^*((\eta^*)^{-1}(\{g\})) \subseteq Kg$ für alle $g \in G$ und

$$\mathit{Kern}(\mu^*) = KG^*(1 - e_\zeta) \ , \tag{5.6}$$

wobei $e_\zeta = \frac{\zeta(1)}{|Z|} \sum_{z \in Z} \zeta(z^{-1}) z$ das zu ζ gehörige Idempotent bezeichne, aufgefaßt als Element von KG^*.

Es wird im folgenden nachgewiesen, daß unter der Voraussetzung 5.2.3 stets eine *Schursche* Erweiterung der Form (5.5) und ein Algebrenepimorphismus $\mu^* : KG^* \longrightarrow A_K$ existieren, so daß die Voraussetzung 5.2.5 erfüllt ist.

Das Faktorensystem α der verschränkten Gruppenalgebra A_K ist ein Element der 2-Kozykelgruppe $Z^2(G, K^*)$. Es sei $\bar{\alpha}$ das Bild von α im Schurmultiplikator von G. Dann kann α bis auf Äquivalenz so gewählt werden, daß zugleich α normalisiert ist (d.h. es gilt $\alpha(x,1) = \alpha(1,x) = 1$ für alle $x \in G$) und die Ordnung von α gleich der Ordnung von $\bar{\alpha}$ im

Schurmultiplikator von G ist. Es ist also keine Einschränkung, α als normalisiert und die Ordnung von α gleich der Ordnung von $\bar{\alpha}$ anzunehmen. Setzt man $Z := \langle\alpha\rangle$, so existiert bekanntlich eine Schursche Erweiterung

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G^* \xrightarrow{\eta^*} G \longrightarrow 1 \tag{5.7}$$

von Z mit G mit zugehörigem Faktorensystem $\beta := \zeta^{-1} \circ \alpha$, wobei ζ ein geeigneter treuer, linearer Charakter aus $\mathrm{Hom}(Z, K^*)$ ist, der Z mit der entsprechenden Untergruppe von K^* identifiziert. G^* ist also isomorph zur Gruppe aller Paare

$$\{(g, z) \mid g \in G, z \in Z\}$$

mit der Multiplikation

$$(g, z) \cdot (g', z') := \big(gg', \zeta^{-1} \circ \alpha(g, g')zz'\big) \tag{5.8}$$

für g, $g' \in G$ und z, $z' \in Z$. Definiert man noch $\eta^*((g, z)) := g$, so ist damit eine Schursche Erweiterung der Form (5.5) konstruiert. Der Isomorphietyp von G^* ist unabhängig von der Wahl von ζ. Ist nämlich ξ ein weiterer treuer, linearer Charakter von Z, so ist $\xi = \zeta^k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$, das teilerfremd zur Ordnung von Z ist. Definiert man nun $\tilde{G}^*$ als die Gruppe aller Paare

$$\{(g, z) \mid g \in G, z \in Z\}\ ,$$

allerdings mit der Multiplikation

$$(g, z) \cdot (g', z') := \big(gg', \xi^{-1} \circ \alpha(g, g')zz'\big)\,, \tag{5.9}$$

so wird durch $(g, z) \longmapsto (g, z^k)$ ein Gruppenisomorphismus von G^* auf $\tilde{G}^*$ definiert. Somit ist durch

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \tilde{G}^* \xrightarrow{\tilde{\eta}^*} G \longrightarrow 1, \tag{5.10}$$

eine Schursche Erweiterung mit Faktorensystem $\gamma := \xi^{-1} \circ \alpha$ gegeben, wobei $\tilde{\eta}^*$ durch $(g, z) \longmapsto g$ definiert ist.

Für die oben konstruierte Erweiterungsgruppe G^* soll nun ein Algebrenepimorphismus $\mu^* : KG^* \longrightarrow A_K$ konstruiert werden, der Voraussetzung 5.2.5 erfüllt. Hierzu definiert man $\mu^* : KG^* \longrightarrow A_K$ durch

$$(g, z) \longmapsto \zeta(z)g \tag{5.11}$$

und K-lineare Fortsetzung. Dann ist μ^* offensichtlich surjektiv und – wie man leicht nachrechnet – ein Algebrenhomomorphismus. Wegen $(\eta^*)^{-1}(\{g\}) = \{(g, z) \mid z \in Z\}$ gilt offenbar auch $\mu^*((\eta^*)^{-1}(\{g\})) \subseteq Kg$ für alle $g \in G$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\mathrm{Kern}(\mu^*) = KG^*(1-e_\zeta)$ gilt. Die Inklusion $KG^*(1-e_\zeta) \subseteq \mathrm{Kern}(\mu^*)$ erkennt man, indem man $\mu^*(1-e_\zeta) = 0$ ausrechnet. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion $\mathrm{Kern}(\mu^*) \subseteq KG^*(1-e_\zeta)$ sei nun y ein Element aus $\mathrm{Kern}(\mu^*)$. Eine leichte Rechnung zeigt dann:

$$y = y\,\left(1 - e_\zeta\right) \in KG^*(1-e_\zeta).$$

Somit folgt $\mathrm{Kern}(\mu^*) \subseteq KG^*(1-e_\zeta)$, und das war zu zeigen. Also leisten G^* und μ^* das Gewünschte.

Damit lassen sich die Resultate aus [Dad94, §7 bis §9] anwenden, die im folgenden kurz aufgelistet seien:

5.2.6 Satz
Unter den Voraussetzungen 5.2.3 und 5.2.5 ist die eindeutig bestimmte maximale R-Unterordnung von A_K genau das Bild von RG^* unter μ^*, d.h. es gilt:

$$A = \mu^*(RG^*).$$

Beweis: siehe [Dad94, Theorem 7.8]. ■

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen den irreduziblen Charakteren von A_K und den irreduziblen Charakteren von G^*, die über ζ liegen.

5.2.7 Satz
Es seien die Voraussetzungen 5.2.3 und 5.2.5 erfüllt. Es sei $\mathrm{Irr}(A_K)$ die Menge der irreduziblen K-Charaktere von A_K und $\mathrm{Irr}(G^*|\zeta) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G^*) \mid \chi|_Z = \chi(1)\cdot\zeta\}$ die Menge der irreduziblen Charaktere von G^*, die über ζ liegen. Dann ist die Abbildung $^* : \mathrm{Irr}(A_K) \longrightarrow \mathrm{Irr}(G^*|\zeta)$ mit

$$\chi \longmapsto \chi^* := \chi \circ \mu^*$$

eine Bijektion und es gilt für die Defekte:

$$d(\chi^*) = d(\chi) + \nu_p(|Z|).$$

Beweis: siehe [Dad94, Proposition 8.1 und Proposition 9.2]. ■

Aus Satz 5.2.6 folgt unmittelbar, daß μ^* das Zentrum von RG^* in das Zentrum von A abbildet. Dade zeigt in [Dad94, Theorem 8.6], daß sogar $\mu^*(Z(RG^*)) = Z(A)$ gilt. Somit induziert μ^* einen F-Algebrenepimorphismus $\bar{\mu}^* : Z(FG^*) \longrightarrow Z(\bar{A})$. Hieraus folgt unmittelbar: Zu jedem p-Block B von A_K gibt es genau einen p-Block B^* von G^*, so daß für die zugehörigen zentralen Charaktere gilt:

$$\bar{\omega}_{B^*} = \bar{\omega}_B \circ \mu^* : Z(FG^*) \longrightarrow F\ . \tag{5.12}$$

Bezeichnet $Bl(A_K)$ die Menge der p-Blöcke von A_K und $Bl(G^*)$ die Menge der p-Blöcke von G^*, so wird durch (5.12) eine Abbildung $^* : Bl(A_K) \longrightarrow Bl(G^*)$ definiert. Der nächste Satz zeigt unter anderem die Injektivität dieser Abbildung.

5.2.8 Satz
Es seien die Voraussetzungen 5.2.3 und 5.2.5 erfüllt. Dann gilt:

$$\mu^*(Z(RG^*)) = Z(A).$$

Es seien ferner $Bl(A_K)$ die Menge der p-Blöcke von A_K und $Bl(G^*)$ die Menge der p-Blöcke von G^*. Dann ist die oben definierte Abbildung $^* : Bl(A_K) \longrightarrow Bl(G^*)$ mit

$$B \longmapsto B^*$$

injektiv, und es gilt für die Defekte:

$$d(B^*) = d(B) + \nu_p(|Z|).$$

Das Bild der Abbildung * ist die Menge aller p-Blöcke von G^*, die über ζ liegen, d.h. die einen irreduziblen Charakter χ enthalten, der über ζ liegt, für den also gilt: $\chi|_Z = \chi(1) \cdot \zeta$.

Beweis: siehe [Dad94, Theorem 8.6 und Korollar 9.7]. ■

Nach diesen Vorbereitungen kann endlich mit der Umformulierung der projektiven Vermutung 5.1.4 begonnen werden:

5.2.9 Definition
Zusätzlich zu den Voraussetzungen 5.2.3 und 5.2.5 sei $d \in \mathbb{Z}$, $B(\zeta)$ ein p-Block von G^*, der über ζ liegt (im Sinne von Satz 5.2.8) und C eine p-Kette von G. Es sei C^* die im Sinne von Satz 1.2.1 zu C gehörige p-Kette von G^*. Dann sei $\mathrm{Irr}(C, B(\zeta), d, \zeta)$ die Menge aller irreduziblen Charaktere von $N_{G^*}(C^*)$, die über ζ liegen, Defekt d haben und in einem p-Block b von $N_{G^*}(C^*)$ liegen, der $B(\zeta)$ induziert. Es sei ferner:

$$k(C, B(\zeta), d, \zeta) := |\mathrm{Irr}(C, B(\zeta), d, \zeta)|\,. \tag{5.13}$$

Dade zeigt in [Dad94, Lemma 19.12], daß für eine p-Kette C von G, einen p-Block B von $A_K[N_G(C)]$ und $d \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$k(A_K[N_G(C)], B, d) = k(C, B^*, d^*, \zeta), \tag{5.14}$$

wobei $d^* := d + \nu_p(|Z|)$ gesetzt sei. Da die linke Seite der Gleichung (5.14) nicht von C, sondern nur von der Konjugiertenklasse von C abhängt, gilt dies auch für die Charakteranzahlen $k(C, B^*, d^*, \zeta)$. Somit sind auch in der folgenden Version der projektiven

Dade-Vermutung die auftretenden alternierenden Summen unabhängig von der Wahl des Vertretersystems $\mathcal{R}(G)/G$.

Damit läßt sich die projektive Dade-Vermutung 5.1.4 umformulieren zu:

5.2.10 Vermutung (Die projektive Dade-Vermutung für Überlagerungsgruppen)
Es sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, $O_p(G) = \{1\}$, Z eine zyklische Faktorgruppe des Schurmultiplikators von G,

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow G^* \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

eine Schursche Erweiterung und ζ ein treuer, linearer Charakter von Z. Dann gilt

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} k(C, B(\zeta), d, \zeta) = 0 \tag{5.15}$$

für alle $d \in \mathbb{Z}$ und jeden Block $B(\zeta)$ von G^*, der über ζ liegt und Defekt $d(B(\zeta)) > \nu_p(|Z|)$ hat.

5.2.11 Bemerkung
Da die Version 5.1.4 der projektiven Vermutung unabhängig von der Wahl der Familie $\mathcal{R}(G)$ oder $\mathcal{E}(G)$ war, darf auch in der Version der projektiven Vermutung für Überlagerungsgruppen $\mathcal{R}(G)$ durch $\mathcal{E}(G)$ ersetzt werden. Es genügt also, Vermutung 5.2.10 für elementare p-Ketten nachzuweisen.

5.3 Die projektiv-invariante Dade-Vermutung

Um den Nachweis seiner Vermutungen auf den Fall zurückführen zu können, daß G einfach ist, hat Dade seine projektive Vermutung dahingehend verallgemeinert, daß er Operationen von Automorphismen auf den irreduziblen Charakteren der Kettennormalisatoren betrachtet. Er gelangt auf diese Weise zu einem projektiven Analogon der invarianten Vermutung. Dade formuliert diese projektiv-invariante Vermutung nur für verschränkte Gruppenalgebren. Die Methoden aus dem vorigen Abschnitt lassen sich zu einer Umformulierung der projektiv-invarianten Vermutung übertragen. In diesem Abschnitt soll daher gleich die Version der projektiv-invarianten Vermutung für Überlagerungsgruppen vorgestellt werden, wie sie beispielsweise [HH97] entnommen werden kann. Es sei in diesem Abschnitt stets die folgende Voraussetzung erfüllt:

5.3.1 Voraussetzung
Es seien G eine endliche Gruppe, Z eine zyklische Faktorgruppe des Schurmultiplikators von G,

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow G^* \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

eine Schursche Erweiterung und ζ ein treuer linearer Charakter von Z.

Es sei nun die Überlagerungsgruppe G^* als Normalteiler in eine Erweiterungsgruppe E^* eingebettet, so daß Z auch zentral in E^* ist. Die in der projektiven Vermutung für Überlagerungsgruppen auftretenden Charakteranzahlen $k(C, B(\zeta), d, \zeta)$ lassen sich nun weiter verfeinern:

5.3.2 Definition
Es sei Voraussetzung 5.3.1 erfüllt, E^* eine endliche Gruppe, $G^* \trianglelefteq E^*$ mit $Z \leq Z(E^*)$, p eine Primzahl, $d \in \mathbb{Z}$, $B(\zeta)$ ein p-Block von G^*, der über ζ liegt, und $H \leq E^*/G^*$. Es sei C eine p-Kette von G und C^* die gemäß Satz 1.2.1 entsprechende p-Kette von G^*. Es sei dann $\operatorname{Irr}(C, B(\zeta), d, \zeta, H)$ die Menge aller irreduziblen Charaktere ψ von $N_{G^*}(C^*)$, die über ζ liegen, Defekt d haben, in einem p-Block b von $N_{G^*}(C^*)$ liegen, der $B(\zeta)$ induziert, und Trägheitsfaktor H besitzen. (Man beachte, daß b^{G^*} definiert ist nach Satz 2.6.4.) Es sei ferner:

$$k(C, B(\zeta), d, \zeta, H) := |\operatorname{Irr}(C, B(\zeta), d, \zeta, H)| \,. \tag{5.16}$$

Hiermit läßt sich die projektiv-invariante Dade-Vermutung wie folgt formulieren:

5.3.3 Vermutung (Die projektiv-invariante Dade-Vermutung)
Zusätzlich zu Voraussetzung 5.3.1 seien E^* eine endliche Gruppe, $G^* \trianglelefteq E^*$ mit $Z \leq Z(E^*)$, p eine Primzahl und $O_p(G) = \{1\}$. Es seien ferner $B(\zeta)$ ein p-Block von G^*, der über ζ liegt und dessen Defekt $d(B(\zeta)) > \nu_p(|Z|)$ ist, $d \in \mathbb{Z}$ und $H \leq E^*/G^*$. Dann gilt:

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} k(C, B(\zeta), d, \zeta, H) = 0 \ . \tag{5.17}$$

5.3.4 Bemerkung

(a) Nach Satz 1.3.1 kann auch in der projektiv-invarianten Vermutung $\mathcal{R}(G)$ durch $\mathcal{E}(G)$ ersetzt werden. Es genügt also, Vermutung 5.3.3 für elementare p-Ketten nachzuweisen.

(b) Ist G einfach und nicht abelsch, so genügt es nach [Dad97], zum Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung 5.3.3 für E^* eine Erweiterungsgruppe von G^* zu betrachten, die durch Konjugation sämtliche Automorphismen von G^* bewirkt, die Z punktweise festlassen.

Kapitel 6

Verifikation für die sporadische Suzuki-Gruppe

Von nun an sei G stets die sporadisch einfache Suzuki-Gruppe Suz. Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes:

6.0.5 Satz
Die projektiv-invariante Vermutung 5.3.3 gilt für die sporadisch einfache Suzuki-Gruppe Suz.

6.0.1 Bemerkung Ist H eine endliche, einfache, nicht-abelsche Gruppe und ist für jede Primzahl r jede r-Sylowgruppe von $\mathrm{Out}(H)$ zyklisch, so ist nach [Dad92] die induktive Dade-Vermutung äquivalent zur projektiv-invarianten Vermutung 5.3.3. Somit folgt aus Satz 6.0.5 auch die Gültigkeit der induktiven Dade-Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$.

Der Beweis von Satz 6.0.5 erstreckt sich über die Abschnitte 6.1 bis 6.7. In Abschnitt 6.1 werden Eigenschaften von $G = \mathrm{Suz}$ ausgenutzt, um einige Reduktionen und Vereinfachungen im Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung vorzunehmen. Abschnitt 6.2 stellt die Methoden vor, mit Hilfe derer sich die elementaren p-Ketten von G und ihre Kettennormalisatoren berechnen lassen. In den Abschnitten 6.3 und 6.4 wird aufgezeigt, wie die in den alternierenden Summen der Dade-Vermutungen auftretenden Charakteranzahlen $k(C, B(\zeta), d, \zeta, H)$, $k(C, B, d, H)$ bzw. $k(C, B(\zeta), d, \zeta)$ bestimmt werden. Schließlich werden in den Abschnitten 6.5 bis 6.7 die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Methoden auf $G = \mathrm{Suz}$ angewandt und die so erhaltenen Ergebnisse zusammengefaßt.

6.1 Reduktionen und Vereinfachungen

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften von G genutzt, um die rechnerische Verifikation der projektiv-invarianten Vermutung für G zu vereinfachen.

Zum Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung 5.3.3 sind die Schurschen Erweiterungen von G der Form

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow G^* \longrightarrow G \longrightarrow 1 \tag{6.1}$$

mit $Z \leq Z(G^*) \cap (G^*)'$ zu betrachten, bei denen Z die zyklischen Faktorgruppen des Schurmultiplikators von G durchläuft. Da der Schurmultiplikator von G zyklisch von Ordnung 6 ist, hat man hier für G^* (bis auf Isomorphie) genau vier Überlagerungsgruppen Suz, 2.Suz, 3.Suz und 6.Suz einzeln zu untersuchen.

Zur Verifikation der projektiv-invarianten Vermutung 5.3.3 ist ferner G^* als Normalteiler in eine endliche Erweiterungsgruppe E^* einzubetten, so daß Z im Zentrum von E^* enthalten ist. D.h. man hat exakte Sequenzen der Gestalt

$$1 \longrightarrow G^* \hookrightarrow E^* \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow 1 \tag{6.2}$$

zu untersuchen, wobei E^* auf Z per Konjugation trivial operiert. Da der äußere Automorphismus von Suz nichttrivial auf dem Zentrum von 3.Suz und 6.Suz operiert, genügt es nach Bemerkung 5.3.4 (b), die projektiv-invariante Vermutung für die Fälle

$$(G^*, E^*) \in \{(\mathrm{Suz}, \mathrm{Suz}\!:\!2), (2.\mathrm{Suz}, 2.\mathrm{Suz}\!:\!2), (3.\mathrm{Suz}, 3.\mathrm{Suz}), (6.\mathrm{Suz}, 6.\mathrm{Suz})\} \tag{6.3}$$

nachzuweisen. Es ist also insbesondere jeweils $\overline{E} := E^*/G^*$ isomorph zu einer Untergruppe der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_2$ der Ordnung 2.

Es seien p eine Primzahl, $\mathcal{E}(G)/G$ ein Vertretersystem der G-Konjugiertenklassen von elementaren p-Ketten von G und $H \leq \mathbb{Z}_2$. Ferner seien G^*, E^* gemäß (6.1), (6.2) und (6.3) gewählt, und es sei ζ ein treuer, linearer Charakter von Z. Mit den Bezeichnungen aus Definition 5.3.2 ist nun also nach Bemerkung 5.3.4 (a) zu zeigen, daß für alle p-Blöcke $B(\zeta)$ von G^*, die über ζ liegen und Defekt $d(B) > \nu_p(|Z|)$ haben, für alle $d \in \mathbb{Z}$ die Summe

$$\sum_{C \in \mathcal{E}(G)/G} (-1)^{|C|}\ k(C, B(\zeta), d, \zeta, H) \tag{6.4}$$

gleich Null ist.

Wegen $|G| = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ sind für $p \neq 2,\ 3,\ 5$ sämtliche p-Sylowgruppen von G zyklisch, womit insbesondere die Defektgruppen der p-Blöcke zyklisch sind. Da

Vermutung 5.3.3 nach [Dad96] für Blöcke mit zyklischer Defektgruppe bewiesen ist, sind im folgenden nur noch die Fälle $p = 2$, 3 und 5 zu untersuchen.

Für $G^* = G = \mathrm{Suz}$ ist das Verschwinden der alternierenden Summen (6.4) offensichtlich äquivalent zur Gültigkeit der invarianten Dade-Vermutung 3.2.4 für $G = \mathrm{Suz}$ und $E = \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Suz}{:}2$. Mit den Bezeichnungen aus Definition 3.2.2 ist somit für $G^* = \mathrm{Suz}$ also nur nachzuweisen, daß für $p = 2, 3, 5$ und jeden p-Block B von G mit Defekt $d(B) > 0$

$$\sum_{C \in \mathcal{E}(G)/G} (-1)^{|C|}\, k(C, B, d, H) = 0 \tag{6.5}$$

ist für alle $d \in \mathbb{Z}$ und $H \leq \mathbb{Z}_2$.

Für $G^* \in \{3.\mathrm{Suz}, 6.\mathrm{Suz}\}$ haben alle irreduziblen Charaktere der Kettennormalisatoren $N_{G^*}(C^*)$, die über einem treuen linearen Charakter von Z liegen, Trägheitsfaktor $\{1\}$. In diesem Fall ist also das Verschwinden von (6.4) gleichbedeutend mit der Gültigkeit der projektiven Vermutung 5.2.10 für G^*. Mit den Bezeichnungen aus Definition 5.2.9 ist somit für $G^* \in \{3.\mathrm{Suz}, 6.\mathrm{Suz}\}$ also nur nachzuweisen, daß für $p = 2, 3, 5$, einen treuen linearen Charakter ζ von Z und jeden p-Block $B(\zeta)$, der über ζ liegt und Defekt $d(B(\zeta)) > \nu_p(|Z|)$ hat, die Summe

$$\sum_{C \in \mathcal{E}(G)/G} (-1)^{|C|}\, k(C, B(\zeta), d, \zeta) \tag{6.6}$$

gleich Null ist für alle $d \in \mathbb{Z}$.

Insgesamt reduziert sich der Nachweis von Satz 6.0.5 somit auf die folgenden drei Schritte:

- Verifikation der invarianten Vermutung 3.2.4 für $G = \mathrm{Suz}$, $E = \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Suz}:2$ und $p = 2$, 3 bzw. 5,
- Verifikation der projektiv-invarianten Vermutung 5.3.3 für $G^* = 2.\mathrm{Suz}$, $E^* = 2.\mathrm{Suz}{:}2$ und $p = 2$, 3 bzw. 5,
- Verifikation der projektiven Vermutung 5.2.10 für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und $6.\mathrm{Suz}$ und $p = 2$, 3 bzw. 5.

Die Methoden zur Durchführung dieser Schritte werden in den Abschnitten 6.2 bis 6.4 beschrieben, in 6.5 bis 6.7 werden dann die Ergebnisse vorgestellt.

6.2 Bestimmung der elementaren p-Ketten und ihrer Normalisatoren

Zur Auswertung der alternierenden Summen (6.4), (6.5) und (6.6) für $p = 2$, 3 bzw. 5 sind zunächst ein Vertretersystem $\mathcal{E}(G)/G$ der G-Konjugiertenklassen von elementaren p-Ketten sowie die zugehörigen Kettennormalisatoren in $G = \mathrm{Suz}$ und $A := \mathrm{Aut}(G)$ zu bestimmen. Die Berechnungen wurden mit Hilfe des Computeralgebrasystems GAP[GAP98] durchgeführt. Die hier verwandten Methoden sind die in [Ent97] und [EP97] beschriebenen.

Für die im folgenden erläuterten Berechnungen wurden treue Permutationsdarstellungen von G und $A = \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Suz}{:}2$ auf 1782 Punkten benutzt, wie sie [WWT$^+$] entnommen werden können. Hierbei sind die Erzeuger von G und A so gewählt, daß G Untergruppe von A ist.

Es sei $G = \mathrm{Suz}$ und p eine Primzahl. Um ein Vertretersystem $\mathcal{E}(G)/G$ der Konjugiertenklassen von elementaren p-Ketten von G zu erhalten, bestimmt man zunächst ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von elementar-abelschen p-Untergruppen von G, d.h. man berechnet ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten von G der Länge 1. Hierzu bestimmt man die Konjugiertenklassen von G mit Vertretern der Ordnung p und wählt in jeder dieser Klassen einen Vertreter. Dann sondert man aus der Menge der von diesen Vertretern erzeugten zyklischen Untergruppen der Ordnung p durch Konjugiertheitstests ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen der Ordnung p von G aus. Per Induktion läßt sich aus einem schon berechneten Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung p^i ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementar-abelschen Untergruppen von Ordnung p^{i+1} wie folgt gewinnen: Man durchläuft die bereits bekannten Vertreter der elementar-abelschen Untergruppen von Ordnung p^i, berechnet für jeden Vertreter P den Zentralisator $C_G(P)$, bestimmt Vertreter der $C_G(P)$-Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung p in $C_G(P)$ und testet, welche dieser Vertreter bereits in P enthalten sind. Die Vertreter, die nicht in P enthalten sind, erzeugen mit P eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung p^{i+1}. Durch Konjugiertheitstests sondert man aus den so gewonnenen Untergruppen ein Vertretersystem von elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung p^{i+1} aus. Auf diese Weise läßt sich rekursiv ein Vertretersystem aller G-Konjugiertenklassen der elementar-abelschen p-Untergruppen von G konstruieren.

Dieses Vorgehen wird durch folgenden Algorithmus realisiert:

Algorithmus 6.2.1: Zu gegebener Gruppe G, einer Primzahl p und einem Vertretersystem $\mathcal{U}$ der G-Konjugiertenklassen der elementar-abelschen Untergruppen der Ordnung p^i von G bestimmt dieser Algorithmus ein Vertretersystem der G-Konjugiertenklassen aller elementar-abelschen p-Untergruppen von G, deren Ordnung mindestens p^i ist.

$\boxed{1}$ Falls $\mathcal{U} = \emptyset$, so gib $\emptyset$ zurück und beende den Algorithmus.

$\boxed{2}$ Initialisiere $\mathcal{V} \leftarrow \emptyset$.

$\boxed{3}$ Falls $\mathcal{U} = \emptyset$, so gib $\mathcal{V}$ zurück und rufe Algorithmus 6.2.1 mit G, p und $\mathcal{V}$ auf. Sonst wähle $P \in \mathcal{U}$, berechne $C_G(P)$ sowie die Konjugiertenklassen von $C_G(P)$ mit Vertretern der Ordnung p, die nicht in P liegen. Bestimme für jeden solchen Vertreter die von P und diesem Vertreter erzeugte Untergruppe der Ordnung p^{i+1} von G und setze $\mathcal{V}(P)$ gleich der Menge aller dieser Untergruppen der Ordnung p^{i+1}.

$\boxed{4}$ Falls $\mathcal{V}(P) = \emptyset$, so ersetze $\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}\backslash\{P\}$ und gehe zu Schritt 3. Sonst wähle $Q \in \mathcal{V}(P)$ und ersetze $\mathcal{V}(P) \leftarrow \mathcal{V}(P)\backslash\{Q\}$. Falls Q zu keinem Element aus $\mathcal{V}$ konjugiert ist, ersetze $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{Q\}$ und gehe zu Schritt 4.

$\boxed{5}$ Gib die Vereinigung der Outputs zurück.

6.2.1 Bemerkung Ruft man Algorithmus 6.2.1 mit G, p und $\mathcal{U} = \{\{1\}\}$ auf, so gibt er ein Vertretersystem der G-Konjugiertenklassen der elementar-abelschen p-Untergruppen von G zurück.

Aus einem so berechneten Vertretersystem der Konjugiertenklassen nichttrivialer elementar-abelscher p-Untergruppen von G läßt sich ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten samt ihrer Normalisatoren wie folgt gewinnen: Man bestimmt zunächst die Normalisatoren $N_G(P)$ und (im Hinblick auf die Untersuchung der invarianten Vermutung) $N_{\mathrm{Aut}(G)}(P)$, wobei P die oben bestimmten Vertreter nichttrivialer elementar-abelscher p-Untergruppen von G durchläuft. Für jeden solchen Vertreter P bestimmt man die Untergruppen von P. Da P relative kleine Ordnung besitzt, ist dies (obwohl P elementar-abelsch ist) ohne großen Aufwand möglich. Anschließend läßt man $N_G(P)$ auf diesen Untergruppen per Konjugation operieren und wählt in jeder Bahn unter dieser Operation einen Vertreter Q_i. Auf diese Weise erhält man aus der Kette $C : 1 < P$ der Länge 1 sämtliche Ketten $C_i : 1 < Q_i < P$ der Länge 2, die in P enden. Die Kettennormalisatoren $N_G(C_i)$ bzw. $N_{\mathrm{Aut}(G)}(C_i)$ lassen sich dann vermöge

$$N_G(C_i) = N_{N_G(P)}(Q_i)$$

bzw.

$$N_{\mathrm{Aut}(G)}(C_i) = N_{N_{\mathrm{Aut}(G)}(P)}(Q_i)$$

bestimmen. Dies liefert ein Vertretersystem sämtlicher Konjugiertenklassen von elementaren p-Ketten der Länge 2 sowie die zugehörigen Kettennormalisatoren in G und $\mathrm{Aut}(G)$. Rekursiv fortfahrend erhält man so ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen sämtlicher nichttrivialer elementarer p-Ketten mit ihren Normalisatoren in G und $\mathrm{Aut}(G)$.

Dies läßt sich in folgendem Algorithmus formulieren:

Es sei $\mathcal{E}_n := \{C_1, \ldots, C_s\}$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten von G der Länge n. Ferner sei P_i für $i = 1, \ldots, s$ die kleinste nichttriviale Untergruppe der Kette C_i, d.h. es sei C_i von der Form $C_i : 1 < P_i < \ldots$ Dann sei

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_n) := \left\{ \left(P_i,\ N_G(C_i),\ N_{\mathrm{Aut}(G)}(C_i)\right) \;\middle|\; i = 1, \ldots, s \right\} . \tag{6.7}$$

Algorithmus 6.2.2: Zu gegebener Gruppe G, Primzahl p und $\mathcal{T}(\mathcal{E}_n)$ gemäß (6.7) bestimmt dieser Algorithmus ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten von G, deren Länge mindestens n ist, mitsamt der zugehörigen Kettennormalisatoren in G und $\mathrm{Aut}(G)$.

$\boxed{1}$ Initialisiere $\mathcal{V} \leftarrow \emptyset$.

$\boxed{2}$ Berechne für jedes Tripel $(P,\ N_G(C),\ N_{\mathsf{Aut}(G)}(C)) \in \mathcal{T}(\mathcal{E}_n)$ die Menge $\mathcal{U}(P)$ aller nichttrivialen Untergruppen von P. Falls $\mathcal{U}(P) = \emptyset$ ist für alle P, so gebe $\emptyset$ zurück und beende den Algorithmus.

$\boxed{3}$ Bestimme für jedes P ein Vertretersystem $\mathcal{R}(P)$ der Bahnen von $N_G(C)$ auf $\mathcal{U}(P)$, wobei $N_G(C)$ auf $\mathcal{U}(P)$ durch Konjugation operiert.

$\boxed{4}$ Für jedes P ersetze $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \ \cup \ \left\{ \left(Q,\ N_{N_G(C)}(Q),\ N_{N_{\mathsf{Aut}(G)}(C)}(Q)\right) \;\middle|\; Q \in \mathcal{R}(P) \right\}$.

$\boxed{5}$ Gib $\mathcal{V}$ zurück und rufe Algorithmus 6.2.2 mit G, p und $\mathcal{V}$ auf.

$\boxed{6}$ Gib die Vereinigung der Outputs zurück.

6.2.2 Bemerkung Hat man mit Algorithmus 6.2.1 ein Vertretersystem $\{E_1, E_2, \ldots, E_s\}$ der Konjugiertenklassen von nichttrivialen elementar-abelschen p-Untergruppen von G bestimmt, so liefert der Aufruf von Algorithmus 6.2.2 mit G, p und

$$\left\{ \left(E_i,\ N_G(E_i),\ N_{\mathrm{Aut}(G)}(E_i)\right) \;\middle|\; i = 1, \ldots, s \right\}$$

ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der nichttrivialen elementaren p-Ketten der Gruppe G.

Nachdem ein Vertretersystem $\mathcal{E}(G)/G$ der G-Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten von G sowie die zugehörigen Kettennormalisatoren $N_G(C)$ und $N_{\mathrm{Aut}(G)}(C)$ für alle Ketten $C \in \mathcal{E}(G)/G$ berechnet sind, ist zu beachten, daß in den alternierenden Summen (6.4), (6.5) und (6.6) nicht über ganz $\mathcal{E}(G)/G$ summiert werden muß. Denn für Kettenpaare $(C, C') \in (\mathcal{E}(G)/G) \times (\mathcal{E}(G)/G)$, für die $N_{\mathrm{Aut}(G)}(C)$ und $N_{\mathrm{Aut}(G)}(C')$ in G konjugiert sind und für die $|C|-|C'|$ ungerade ist, heben sich die entsprechenden Summanden in (6.4), (6.5) und (6.6) weg. Solche Ketten C und C' müssen also für die Auswertung von (6.4), (6.5) und (6.6) nicht betrachtet werden und können weggelassen werden. Das Fortlassen solcher Kettenpaare werde im folgenden als das „Kürzen von Ketten aus $\mathcal{E}(G)/G$" bezeichnet, und die Menge der nach dem Kürzen übriggebliebenen Ketten heiße ein „aus $\mathcal{E}(G)/G$ hervorgegangenes gekürztes Vertretersystem $(\mathcal{E}(G)/G)'$ ". Durch das Kürzen der Ketten läßt sich die Anzahl der zu betrachtenden Ketten erheblich reduzieren.

Für $G = \mathrm{Suz}$ und $p \in \{2, 3, 5\}$ läßt sich mit Hilfe des GAP-Programms `ElemChains`, das im Anhang abgedruckt ist und das auf den Algorithmen 6.2.1 und 6.2.2 basiert, ein gekürztes Vertretersystem der G-Konjugiertenklassen der nichttrivialen elementaren p-Ketten sowie die zugehörigen Kettennormalisatoren in G und $\mathrm{Aut}(G)$ bestimmen. Die in den Abschnitten 6.5 bis 6.7 zugrundegelegten Ketten und Normalisatoren wurden mit `ElemChains` berechnet (vgl. auch die Erläuterungen im Anhang).

6.3 Die Urbilder der Kettennormalisatoren

Es seien $G = \mathrm{Suz}$, $p \in \{2, 3, 5\}$ und $(\mathcal{E}(G)/G)' = \{ C_0, C_1, \ldots, C_s \}$ ein gekürztes Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten von G mit den Kettennormalisatoren $N_i := N_G(C_i)$ und $M_i := N_{\mathrm{Aut}(G)}(C_i)$ in G bzw. $\mathrm{Aut}(G)$ für $i = 0, 1, \ldots, s$. Es seien ferner $G^* \in \{2.\mathrm{Suz},\ 3.\mathrm{Suz},\ 6.\mathrm{Suz}\}$, $Z = Z(G^*)$ wie in Abschnitt 6.1. Für $G^* \in \{ 3.\mathrm{Suz},\ 6.\mathrm{Suz}\}$ bezeichne η^* den kanonischen Epimorphismus

$$\eta^* : \ G^* \ \longrightarrow \ G^*/Z \ \cong \ \mathrm{Suz}$$

von G^* auf G. (Obwohl η^* offensichtlich von der Überlagerungsgruppe G^* abhängt, wird dies in der Bezeichnung „η^*" der Übersichtlichkeit halber nicht zum Ausdruck gebracht, da Mißverständnisse wohl nicht zu befürchten sind.)

Zur Verifikation der projektiven Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und $6.\mathrm{Suz}$ sind die Charaktertafeln der Urbilder der Kettennormalisatoren N_i

$$N_i^* := (\eta^*)^{-1}(N_i)$$

für $i = 0, 1, \ldots s$ zu bestimmen. Ein bequemer Weg zur Berechnung dieser Charaktertafeln besteht darin, Permutationsdarstellungen von 3.Suz und 6.Suz mit Hilfe der MeatAxe [Rin94] zu konstruieren und den kanonischen Epimorphismus η^* als Abbildung der erzeugenden Permutationen anzugeben. Damit lassen sich dann die Urbilder N_i^* explizit ausrechnen.

Für $G^* = 3.\text{Suz}$ geht man hierzu folgendermaßen vor:

Suz hat eine zu $G_2(4)$ isomorphe maximale Untergruppe vom Index 1782, die im folgenden ebenfalls mit $G_2(4)$ bezeichnet werde. Der Schurmultiplikator von $G_2(4)$ hat Ordnung 2. Somit ist das Urbild von $G_2(4)$ in $G^* = 3.\text{Suz}$ das direkte Produkt von $Z(G^*)$ und einer zu $G_2(4)$ isomorphen Untergruppe U. Also besitzt 3.Suz eine treue Permutationsdarstellung auf $3 \cdot 1782 = 5346$ Punkten. Es sei nun 3.Suz gegeben durch die 12-dimensionale Matrixdarstellung über $GF(25)$ wie sie [WWT$^+$] entnommen werden kann. Die Matrixdarstellung ist a.a.O. gegeben durch die beiden darstellenden Matrizen der Standarderzeuger A und B von 3.Suz. Ferner sei V der zugehörige natürliche Modul. Um aus diesen Matrizen eine treue Permutationsdarstellung von 3.Suz zu konstruieren, sucht man mit Hilfe des MeatAxe-Programms `zvp` eine Bahn $|vG^*|$ in V der Länge 5346. Hat man eine solche Bahn gefunden, so lassen sich - ebenfalls mit `zvp` - die Permutationen π_A und π_B von $|vG^*|$ unter den erzeugenden Matrizen bestimmen. Diese Permutationen definieren dann eine Permutationsdarstellung von 3.Suz, die bekanntlich äquivalent ist zu der Darstellung, die man durch die Operation von 3.Suz auf den Nebenklassen nach $\text{Stab}_{3.\text{Suz}}(v)$ erhält. Wegen

$$Z(3.\text{Suz}) \ \cap\ \text{Stab}_{3.\text{Suz}}(v) = \{1\}$$

ist diese Permutationsdarstellung treu.

Nachdem eine treue Permutationsdarstellung für 3.Suz in Form von π_A und π_B gefunden ist, läßt sich der kanonische Epimorphismus $\eta^* :\ G^* \longrightarrow\ G$ leicht konstruieren:

Es seien a und b die Standarderzeuger von Suz und π_a bzw. π_b die in [WWT$^+$] gegebenen Permutationen für a bzw. b, die bereits in Abschnitt 6.2 bei der Konstruktion der elementaren p-Ketten benutzt wurden. Da nach [WWT$^+$] A und B als Urbilder von a bzw. b gewählt sind, läßt sich durch

$$\pi_A \longmapsto \pi_a$$

$$\pi_B \longmapsto \pi_b$$

der kanonische Epimorphismus η^* definieren. In GAP kann man dies mit dem Befehl

```
etastern := GroupHomomorphismByImagesNC( Gstern, G,
            [ piA, piB ], [ pia, pib ]);
```

durchführen, wobei G^* und G als Permutationsgruppen `GStern` und `G` wie oben beschrieben gegeben sind und **`piA`**, **`piB`**, **`pia`**, **`pib`** die π_A, π_B, π_a, π_b entsprechenden Permutationen sind. Die Urbilder N_i^* der N_i lassen sich dann mit dem GAP-Befehl `PreImages` berechnen.

Damit hat man die Urbilder N_i^* für $i = 0, 1, \ldots, s$ als Untergruppen von 3.Suz auf 5346 Punkten gegeben, d.h. man kann jedes Urbild N_i^* als Untergruppe

$$N_i^* \leq 3.\mathrm{Suz} \leq S_{5346}$$

auffassen, wobei S_{5346} die symmetrische Gruppe auf 5346 Punkten bezeichne. Somit operiert N_i^* in natürlicher Weise auf $\{1, 2, \ldots, 5346\}$. Schränkt man diese Operation auf eine Bahn der Länge $k_i \leq 5346$ ein, so liefert dies eine (nicht notwendigerweise treue) Permutationsdarstellung $\sigma_i : N_i^* \longrightarrow S_{k_i}$ von N_i^* auf k_i Punkten. Findet man eine Bahn der Länge k_i, so daß $|N_i^*| = |\sigma_i(N_i^*)|$ gilt, so ist die zugehörige Permutationsdarstellung σ_i offensichtlich treu. Da die Operation von N_i^* auf $\{1, 2, \ldots, 5346\}$ in den meisten Fällen nicht transitiv ist, läßt sich auf diese Weise für $i = 0, 1, \ldots, s$ eine treue Permutationsdarstellung σ_i von N_i^* auf k_i Punkten konstruieren, wobei k_i zumeist deutlich kleiner als 5346 ist. Man sollte jedoch nicht nur die Permutationsgruppen $\sigma_i(N_i^*) \leq S_{k_i}$ abspeichern, sondern auch die Isomorphismen

$$\sigma_i : N_i^* \longrightarrow \sigma_i(N_i^*) \leq S_{k_i} \ , \tag{6.8}$$

da sie in manchen Fällen zur Bestimmung der Fusionen der Konjugiertenklassen von N_i^* in 3.Suz benötigt werden (siehe auch Abschnitt 6.4).

Um die Urbilder N_i^* der N_i in $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ zu bestimmen, geht man analog vor:

In diesem Fall benutzt man eine maximale Untergruppe von $G = \mathrm{Suz}$, die isomorph zu $U_5(2)$ ist und in Suz Index 32760 hat. Im folgenden werde diese Untergruppe ebenfalls mit $U_5(2)$ bezeichnet. Da $U_5(2)$ Schurmultiplikator $\{1\}$ hat, ist das Urbild von $U_5(2)$ in $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ das direkte Produkt von $Z(G^*)$ und einer zu $U_5(2)$ isomorphen Untergruppe U. Somit besitzt 6.Suz eine treue Permutationsdarstellung auf $6 \cdot 32760 = 196560$ Punkten. Hier kann die 12-dimensionale Matrixdarstellung über $GF(7)$ von 6.Suz aus [WWT$^+$] verwandt werden. Diese Matrixdarstellung ist wieder gegeben durch die darstellenden Matrizen der Standarderzeuger A und B. V sei wieder der zugehörige natürliche Modul. Analog zum Fall 3.Suz sucht man hier mit `zvp` nach einer Bahn der Länge 196560 unter der natürlichen Operation. Hat man eine solche Bahn gefunden, so definieren wieder die Permutationen π_A und π_B, die durch die Operation von A und B auf dieser Bahn gegeben sind, eine Permutationsdarstellung von $G^* = 6.\mathrm{Suz}$. Mit einer zum Fall 3.Suz analogen Argumentation sieht man, daß die so gewonnene Permutationsdarstellung von 6.Suz treu ist.

Da auch in diesem Fall die Standarderzeuger A und B nach [WWT$^+$] Urbilder der Standarderzeuger a bzw. b von Suz sind, läßt sich η^* auf analoge Weise mit Hilfe des GAP-Befehls `GroupHomomorphismByImagesNC` konstruieren. Die Berechnung der Urbilder N_i^* mittels `PreImages` sowie die Gewinnung der Permutationsdarstellungen σ_i der Urbilder N_i auf weniger Punkten läßt sich wie oben beschrieben vornehmen.

Für $G^* = 2.\mathrm{Suz}$ liegt eine etwas kompliziertere Situation vor: In diesem Fall ist nicht nur die projektive Vermutung, sondern die projektiv-invariante Vermutung zu verifizieren. Es sind also zusätzlich die Trägheitsfaktoren der irreduziblen Charaktere der Urbilder in 2.Suz der Kettennormalisatoren zu bestimmen. Es sei 2.Suz:2 die Gruppe mit der Struktur 2.Suz:2, deren Charaktertafel im Atlas [CCN$^+$85] zu finden ist. (Hinsichtlich der hierzu isoklinen Gruppe siehe Bemerkung 6.3.1.) Es sei in diesem Fall μ^* der kanonische Epimorphismus

$$\mu^* : \ 2.\mathrm{Suz{:}2} \ \longrightarrow \ \mathrm{Suz{:}2}$$

von 2.Suz : 2 auf Suz : 2. Zur Verifikation der projektiv-invarianten Vermutung für 2.Suz werden die Urbilder

$$N_i^* := (\mu^*)^{-1}(N_i) \ \text{ und } \ M_i^* := (\mu^*)^{-1}(M_i)$$

für $i = 0, 1, \ldots s$ benötigt. Zu diesem Zweck konstruiert man analog zu oben eine Permutationsdarstellung von 2.Suz:2 sowie den kanonischen Epimorphismus μ^* durch die Bilder der erzeugenden Permutationen. Im einzelnen geht man so vor:

Analog zum Vorgehen bei 3.Suz und 6.Suz konstruiert man aus der 12-dimensionalen Matrixdarstellung von 2.Suz:2 über $GF(3)$ aus [WWT$^+$] eine treue Permutationsdarstellung von 2.Suz:2. Diese Matrixdarstellung ist gegeben durch die darstellenden Matrizen der Standarderzeuger C und D von 2.Suz:2. V sei wieder der zugehörige natürliche Modul. Analog zu den oben behandelten Fällen findet man hier mit `zvp` eine Bahn der Länge 65520 unter der natürlichen Operation. Die Permutationen π_C und π_D, die durch die Operation von C und D auf dieser Bahn definiert seien, liefern dann eine treue Permutationsdarstellung von 2.Suz:2.

Es seien c und d die Standarderzeuger von Suz : 2 und π_c bzw. π_d die in [WWT$^+$] gegebenen Permutationen für c bzw. d, die ebenfalls schon in Abschnitt 6.2 bei der Konstruktion der elementaren p-Ketten benutzt wurden. Nach [WWT$^+$] sind dann C und D Urbilder von c bzw. d, d.h. μ^* ist durch

$$\begin{array}{ccc} \pi_C & \longmapsto & \pi_c \\ \pi_D & \longmapsto & \pi_d \end{array}$$

gegeben.

Analog zum oben beschriebenen Vorgehen lassen sich dann mit den GAP - Befehlen `GroupHomomorphismByImagesNC` und `PreImages` die Urbilder N_i^* und M_i^* für $i = 0, \ldots, s$ bestimmen.

Damit hat man die Urbilder N_i^* und M_i^* als Untergruppen von 2.Suz:2 auf 65520 Punkten gegeben, so daß man jedes Urbild M_i^* als Untergruppe der S_{65520} auffassen kann. Analog zu obigem Vorgehen kann man für jedes $i \in \{0, \ldots, s\}$ durch Einschränken der natürlichen Operation von M_i^* (als Untergruppe der S_{65520}) auf eine geeignete Bahn eine treue Permutationsdarstellung $\sigma_i : M_i^* \longrightarrow S_{k_i}$ erhalten, wobei k_i die Länge dieser Bahn ist. Da die Operation von M_i^* auf $\{1, \ldots, 65520\}$ im allgemeinen nicht transitiv ist, ist k_i in den meisten Fällen deutlich kleiner als 65520. Diese Isomorphismen

$$\sigma_i : M_i^* \longrightarrow \sigma_i(M_i^*) \tag{6.9}$$

sollten ebenfalls abgespeichert werden, da sich dann die Urbilder N_i^* via σ_i in die $\sigma_i(M_i^*)$ einbetten lassen.

6.3.1 Bemerkung Die zu 2.Suz.2 isokline Gruppe muß für den Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung für 2.Suz nicht gesondert betrachtet werden, da die Frage nach der Invarianz der irreduziblen Charaktere der N_i^* unabhängig davon ist, welche der beiden isoklinen Gruppen vom Typ 2.Suz.2 man betrachtet. Wählt man eine treue Matrixdarstellung von 2.Suz.2, so existiert eine treue Matrixdarstellung der isoklinen Gruppe, die auf 2.Suz mit der Darstellung von 2.Suz.2 übereinstimmt und sich außerhalb von 2.Suz von der Darstellung von 2.Suz.2 nur durch die Multiplikation mit vierten Einheitswurzeln unterscheidet. Diese vierten Einheitswurzeln sind jedoch für die Operation auf den Klassen der N_i^* irrelevant. Es genügt somit, nur eine der beiden isoklinen Gruppen vom Typ 2.Suz.2 zu untersuchen.

Nachdem die Urbilder der Kettennormalisatoren bestimmt sind, sind die zugehörigen Charaktertafeln zu berechnen. Die hierzu benötigten Methoden sollen im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

6.4 Abzählen der Charaktere

Die Bezeichnungen seien aus Abschnitt 6.3 übernommen. Es sei C_0 die triviale Kette der Länge 0 und $p \in \{2, 3, 5\}$ fest gewählt. Das Ziel dieses Abschnitts ist die Beschreibung der Methoden, die benötigt werden, um die in den alternierenden Summen (6.4), (6.5) und (6.6) auftretenden Charakteranzahlen $k(C, B(\zeta), d, \zeta, H)$, $k(C, B, d, H)$ bzw. $k(C, B(\zeta), d, \zeta)$ zu bestimmen.

Zum Nachweis der invarianten Vermutung für $G = \text{Suz}$ werden die Werte $k(C, B, d, H)$ gesucht, bei denen C eine elementare p-Kette aus einem gekürzten Vertretersystem, B ein p-Block von G, $d \in \mathbb{Z}$ und $H \leq \mathbb{Z}_2$ ist. $k(C, B, d, H)$ ist definiert als die Anzahl der irreduziblen Charaktere des Kettennormalisators $N_G(C)$, die Defekt d und Trägheitsfaktor H besitzen und in einem Block b von $N_G(C)$ mit $b^G = B$ liegen. Zur Bestimmung von $k(C, B, d, H)$ sind also zunächst die Charaktertafeln der N_i für $i = 0, 1, \ldots, s$ zu berechnen. Bis auf die Charaktertafel des Normalisators N_0 der trivialen p-Kette der Länge 0 lassen sich diese Tafeln leicht mit Hilfe des in GAP implementierten Dixon-Schneider-Algorithmus' (siehe [Hul93, Kapitel 2]) berechnen. Da die triviale Kette den Normalisator $N_0 = G = \text{Suz}$ hat, ist somit auch die Charaktertafel von N_0 bekannt. Sie kann beispielsweise dem Atlas [CCN+85] oder der GAP -Bibliothek entnommen werden.

Da die $N_i = N_G(C_i)$ als Untergruppen der $M_i = N_{\text{Aut}(G)}(C_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, s$ gegeben sind, läßt sich für jeden irreduziblen Charakter χ von N_i seine Trägheitsgruppe T_χ in M_i mit Hilfe des GAP-Befehls `InertiaSubgroup` bestimmen. Ist dann T_χ nicht in $G = \text{Suz}$ enthalten, so hat χ Trägheitsfaktor $\mathbb{Z}_2$, andernfalls Trägheitsfaktor $\{1\}$. Auf diese Weise läßt sich leicht feststellen, welche der irreduziblen Charaktere von N_i, $i = 0, 1, \ldots, s$ invariant bzw. nicht invariant sind.

Um die Anzahlen $k(C, B, d, H)$ zu berechnen, muß man weiterhin wissen, welche p-Blöcke von N_i welche p-Blöcke von $G = \text{Suz}$ induzieren. Die p-Blöcke von G lassen sich mit dem GAP -Befehl `PrimeBlocks` leicht bestimmen und seien mit $B_0, B_1, \ldots, B_r$ bezeichnet; B_0 sei der Hauptblock von G. Es sei ferner b ein p-Block eines Kettennormalisators N_i. Um festzustellen, welcher Block B_i von b induziert wird, kann man wie folgt vorgehen:

Man wählt in jedem Block B_j einen irreduziblen Charakter χ_j sowie einen irreduziblen Charakter θ in b und vergleicht den zentralen Charakter ω_{θ^G} (vgl. Satz 2.4.3 und Lemma 2.6.2) des von θ in G induzierten Charakters θ^G mit den zentralen Charakteren ω_{χ_j} der Charaktere χ_j auf den p'-Klassen von G modulo p für $j = 0, 1, \ldots, r$. Hierzu berechnet man zunächst den von θ in G induzierten Charakter. Die zum Induzieren benötigten Fusionen (vgl. [Bre99]) der Konjugiertenklassen von N_i in die Konjugiertenklassen von G kann man in GAP mit Hilfe des Befehls `PossibleClassFusions` berechnen. Nach Bestimmung der Fusionen läßt sich dann der induzierte Charakter θ^G mit dem GAP-Befehl

```
InducedClassFunctionsByFusionMap
```

berechnen. Sind dann für ein $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$ die Kongruenzen

$$\omega_{\theta^G}(x) \equiv \omega_{\chi_j}(x) \mod \text{p} \tag{6.10}$$

im Ring der ganzen algebraischen Zahlen für alle Vertreter x der p'-Klassen von G erfüllt, so gilt $b^G = B_j$ für dieses j.

6.4.1 Bemerkung In einigen Fällen lassen sich die Fusionen der Klassen von N_i in die Klassen von G mit dem Befehl `PossibleClassFusions` nicht eindeutig bestimmen. Dies ist dann der Fall, wenn sich allein anhand der Charaktertafeln von N_i und G nicht eindeutig entscheiden läßt, wie N_i in G eingebettet ist. In einem solchen Fall ist dann stets einzeln zu untersuchen, ob die obigen Betrachtungen unabhängig von der Wahl dieser Fusionen sind oder ob beispielsweise nur ein Vertretersystem der Bahnen unter der Operation der Tafelautomorphismen auf der Charaktertafel von N_i betrachtet werden muß. Da in diesem Zusammenhang die Untergruppen $N_i \leq G$ für $i = 0, 1, \ldots, s$ simultan betrachtet werden, ist hierbei jedoch jeweils eine Einzelfallbetrachtung nötig

Die Suche des von b induzierten Blockes läßt sich erleichtern, wenn man die triviale Tatsache beachtet, daß die Blöcke B_j von G, die Defekt 0 haben, für die invariante Vermutung nicht betrachtet werden müssen. Aus Satz 2.6.5 folgt ferner, daß der Hauptblock b der einzige Block eines jeden Kettennormalisators N_i ist, der den Hauptblock B_0 von G induziert. Man hat somit drei Kriterien zur Verfügung, die das Auffinden des von b induzierten Blocks erleichtern und in folgender Bemerkung zusammengefaßt seien:

6.4.2 Bemerkung Es seien die Bezeichnungen aus Abschnitt 6.3 übernommen, und es sei $p \in \{2, 3, 5\}$ fest gewählt. Es seien ferner B_0, B_1, …, B_r die p-Blöcke von G; B_0 sei der Hauptblock. Es sei b ein p-Block eines Kettennormalisators N_i. Dann gilt:

(a) b ist genau dann der Hauptblock von N_i, wenn $b^G = B_0$ gilt.

(b) Blöcke B_j vom Defekt 0 müssen für die Verifikation der invarianten Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ nicht betrachtet werden.

(c) Wählt man in jedem Block B_j einen irreduziblen Charakter χ_j sowie einen irreduziblen Charakter θ in b, so läßt sich – wie oben beschrieben – durch Vergleich der zugehörigen zentralen Charaktere ω_{θ^G} mit den zentralen Charakteren ω_{χ_j} auf den p'-Klassen von G modulo p für $j = 0, 1, \ldots, r$ entscheiden, welcher Block B_j von b induziert wird.

Mit Bemerkung 6.4.2 läßt sich in allen bei der Verifikation der invarianten Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ auftretenden Fällen die Frage nach der Induktion von Blöcken entscheiden.

Zur Verifikation der projektiven Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und $6.\mathrm{Suz}$ sind die Charakteranzahlen $k(C, B(\zeta), d, \zeta)$ für eine elementare p-Kette C, einen treuen, linearen Charakter ζ von $Z(G^*)$, einen p-Block $B(\zeta)$ von G^*, der über ζ liegt, und $d \in \mathbb{Z}$ gesucht. $k(C, B(\zeta), d, \zeta)$ ist definiert als die Anzahl aller irreduziblen Charaktere des Kettennormalisators $N_{G^*}(C^*)$, die Defekt d haben, über ζ liegen und zu einem Block b mit $b^G = B(\zeta)$ gehören. Da die Urbilder $N_i^* = (\eta^*)^{-1}(N_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, s$ wie in Abschnitt 6.3 beschrieben als Permutationsgruppen gegeben sind, lassen sich wiederum mit dem Dixon-Schneider-Algorithmus die meisten Charaktertafeln der Urbilder N_i^* ausrechnen. Nur für ein einziges Urbild N_i^* in $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ war das Ausrechnen der Charaktertafel mit dem Dixon-Schneider-Algorithmus nicht möglich. In diesem Fall konnte jedoch die Tafel des Urbildes in 6.Suz aus den Tafeln der Urbilder in 2.Suz und 3.Suz erschlossen werden. Nach der Berechnung der Charaktertafeln lassen sich die Fusionen der Konjugiertenklassen von N_i^* in die Klassen von 3.Suz bzw. 6.Suz mit `GAP` und dem Befehl `PossibleClassFusions` bestimmen (hinsichtlich der Eindeutigkeit dieser Fusionen gelten zu Bemerkung 6.4.1 analoge Einschränkungen). Es sei ζ einer der beiden treuen, linearen Charaktere von $Z(G^*)$. Dann läßt sich anhand der Fusionen der Klassen der N_i^* in G^* ersehen, welche irreduziblen Charaktere von N_i^* über ζ liegen.

Da die Trägheitsfaktoren für die projektive Vermutung ohne Bedeutung sind, ist nur noch zu untersuchen, welche p-Blöcke von G^* von den p-Blöcken der Urbilder N_i^* induziert werden. Es seien B_0, B_1, …, B_s die p-Blöcke von G^* und $\chi_j \in \mathrm{Irr}(B_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, s$. Es sei ferner $i \in \{0, 1, \ldots, s\}$ und $b(\zeta)$ ein p-Block von N_i, der über ζ liegt. Man wähle einen irreduziblen Charakter θ in $b(\zeta)$ und berechne den induzierten Charakter θ^{G^*} mit Hilfe der schon bekannten Fusionen von N_i^* in G^*. Analog zu dem oben dargelegten Vorgehen läßt sich durch Vergleich der zentralen Charaktere $\omega_{\theta^{G^*}}$ und ω_{χ_j} auf den p'-Klassen von G^* modulo p der von $b(\zeta)$ induzierte Block feststellen. Aus [Dad94, Theorem 10.10] und Satz 2.6.5 ergeben sich als weitere Kriterien, daß ein Block $b(\zeta)$, der über ζ liegt, nur solche Blöcke von G^* induzieren kann, die ebenfalls über ζ liegen, und daß der Hauptblock von N_i^* der einzige Block ist, der den Hauptblock von G induziert. Zusammenfassend kann man also drei Kriterien festhalten, mit Hilfe derer sich der von $b(\zeta)$ induzierte Block feststellen läßt:

6.4.3 Bemerkung Es seien die Bezeichnungen aus Abschnitt 6.3 übernommen, und es sei $p \in \{2, 3, 5\}$. Es seien ferner $G^* \in \{3.\mathrm{Suz}, 6.\mathrm{Suz}\}$ und ζ ein treuer, linearer Charakter von $Z(G^*)$. B_0, B_1, …, B_r seien die p-Blöcke von G^*; B_0 sei der Hauptblock von G^*. Es sei $b(\zeta)$ ein p-Block eines Urbildes N_i^* in G^*, der über ζ liegt. Dann gilt:

(a) $b(\zeta)$ ist genau dann der Hauptblock von N_i^*, wenn $b(\zeta)^{G^*} = B_0$ gilt.

(b) Der von $b(\zeta)$ in G^* induzierte Block liegt über ζ.

(c) Wählt man in jedem Block B_j einen irreduziblen Charakter χ_j sowie einen irreduziblen Charakter θ in $b(\zeta)$, so läßt sich - wie oben beschrieben - durch Vergleich der zugehörigen zentralen Charaktere $\omega_{\theta^{G^*}}$ mit den zentralen Charakteren ω_{χ_j} auf den p'-Klassen von G^* modulo p für $j = 0, 1, \ldots, r$ entscheiden, welcher Block B_j von $b(\zeta)$ induziert wird.

Für $G^* = 2.\mathrm{Suz}$ ist nach Abschnitt 6.1 die projektiv-invariante Vermutung zu verifizieren. Es sind also die Charakteranzahlen $k(C, B(\zeta), d, \zeta, H)$ für eine elementare p-Kette C, einen treuen, linearen Charakter ζ von $Z(G^*)$, einen p-Block $B(\zeta)$ von G^*, der über ζ liegt, $d \in \mathbb{Z}$ und $H \leq \mathbb{Z}_2$ gesucht. $k(C, B(\zeta), d, \zeta, H)$ ist definiert als die Anzahl aller irreduziblen Charaktere des Kettennormalisators $N_{G^*}(C^*)$, die Defekt d und Trägheitsfaktor H haben, über ζ liegen und zu einem Block b mit $b^G = B(\zeta)$ gehören. Da die Urbilder $N_i^* = (\mu^*)^{-1}(N_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, s$ wie in Abschnitt 6.3 beschrieben als Permutationsgruppen gegeben sind, lassen sich wiederum mit dem Dixon-Schneider-Algorithmus die meisten Charaktertafeln der Urbilder N_i^* ausrechnen. Nur für das Urbild N_2^* in 2.Suz in Charakteristik 3 war das Ausrechnen der Charaktertafel mit dem Dixon-Schneider-Algorithmus nicht möglich (vgl. die Anmerkungen auf Seite 77). In diesem Fall konnte jedoch Dr. Thomas Breuer die Tafel des Urbildes in 2.Suz mitsamt der Fusionen in 2.Suz aus den Tafeln von 2.Suz und N_i berechnen. Für die restlichen Charaktertafeln lassen sich die Fusionen der Konjugiertenklassen von N_i^* in die Klassen von 2.Suz wieder mit dem GAP-Befehl `PossibleClassFusions` bestimmen (hinsichtlich der Eindeutigkeit gelten zu Bemerkung 6.4.1 analoge Einschränkungen). Es sei ζ einer der beiden treuen, linearen Charaktere von $Z(G^*)$. Dann läßt sich anhand der Fusionen der Klassen der N_i^* in G^* ersehen, welche irreduziblen Charaktere von N_i^* über ζ liegen. Da die Urbilder $N_i^* = (\mu^*)^{-1}(N_G(C_i))$ als Untergruppen der $M_i^* = (\mu^*)^{-1}(M_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, s$ gegeben sind, läßt sich für jeden irreduziblen Charakter χ von N_i^* seine Trägheitsgruppe T_χ in M_i^* mit Hilfe des GAP-Befehls `InertiaSubgroup` bestimmen. Ist dann T_χ nicht in $G^* = 2.\mathrm{Suz}$ enthalten, so hat χ Trägheitsfaktor $\mathbb{Z}_2$, andernfalls Trägheitsfaktor $\{1\}$. Auf diese Weise läßt sich leicht feststellen, welche der irreduziblen Charaktere von N_i, $i = 0, 1, \ldots, s$ invariant bzw. nicht invariant sind. Für die Induktion der Blöcke gelten analoge Aussagen, die hier noch einmal explizit angegeben seien (die Argumentation zu Bemerkung 6.4.3 läßt sich wörtlich auf 2.Suz übertragen).

6.4.4 Bemerkung Es seien die Bezeichnungen aus Abschnitt 6.3 übernommen, und es sei $p \in \{2, 3, 5\}$. Es seien ferner $G^* = 2.\mathrm{Suz}$ und ζ ein treuer, linearer Charakter von $Z(G^*)$. B_0, B_1, …, B_r seien die p-Blöcke von G^*; B_0 sei der Hauptblock von G^*. Es sei $b(\zeta)$ ein p-Block eines Urbildes N_i^* in G^*, der über ζ liegt. Dann gilt:

(a) $b(\zeta)$ ist genau dann der Hauptblock von N_i^*, wenn $b(\zeta)^{G^*} = B_0$ gilt.

(b) Der von $b(\zeta)$ in G^* induzierte Block liegt über ζ.

(c) Wählt man in jedem Block B_j einen irreduziblen Charakter χ_j sowie einen irreduziblen Charakter θ in $b(\zeta)$, so läßt sich - wie oben beschrieben - durch Vergleich der zugehörigen zentralen Charaktere $\omega_{\theta^{G^*}}$ mit den zentralen Charakteren ω_{χ_j} auf den p'-Klassen von G^* modulo p für $j = 0, 1, \ldots, r$ entscheiden, welcher Block B_j von $b(\zeta)$ induziert wird.

6.5 Der Fall p=2

Die in den Abschnitten 6.2 bis 6.4 beschriebenen Methoden liefern im Fall $p = 2$ folgende Ergebnisse: Mit der Unterfunktion `ElemAbSubgroups` des GAP -Programms `ElemChains` aus dem Anhang rechnet man nach, daß G = Suz genau 26 Konjugiertenklassen von nichttrivialen elementar-abelschen 2-Untergruppen mit Vertretern E_1, E_2, …,E_{26} besitzt. Das Poset dieser Konjugiertenklassen hat folgende Gestalt: (Die Ordnung auf diesem Poset ist gegeben durch die Inklusion zweier Vertreter, d.h. es gelte für zwei Konjugiertenklassen $E_i^G \leq E_j^G$ genau dann, wenn es Vertreter $E \in E_i^G$ und $F \in E_j^G$ gibt mit $E \leq F$.)

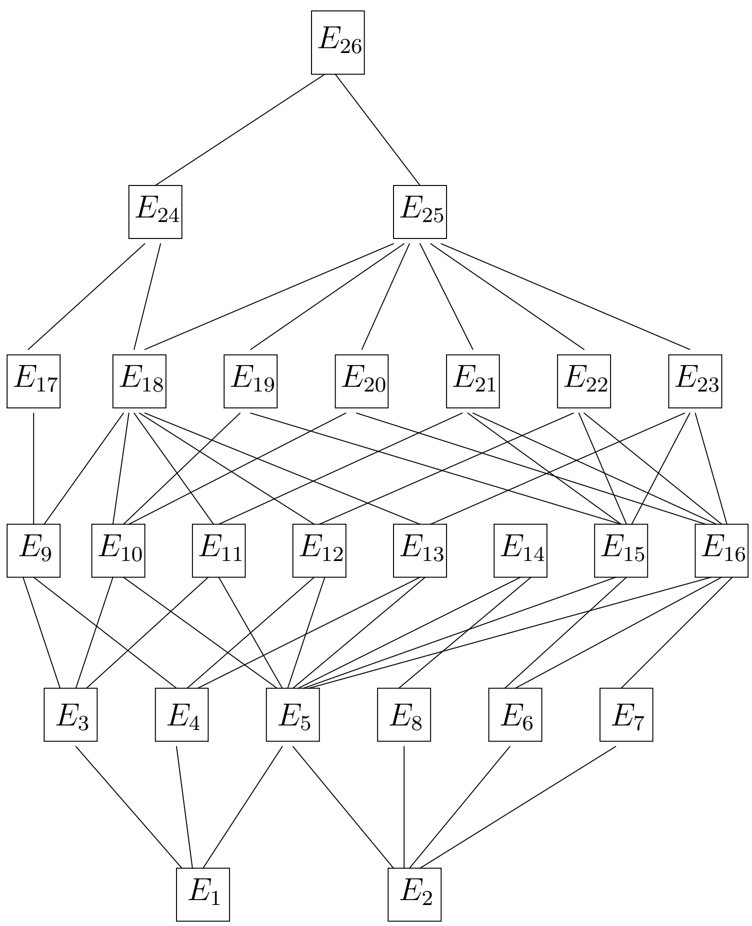

Abb. 6.1: Poset der Konjugiertenklassen der nichttrivialen elementar-abelschen 2-Untergruppen von G

Ein gekürztes Vertretersystem der nichttrivialen elementaren 2-Ketten von $G = \mathrm{Suz}$ läßt sich - wie in Abschnitt 6.2 beschrieben - mit Hilfe des GAP-Programms `ElemChains` aus dem Anhang berechnen. Man erhält auf diese Weise ein gekürztes Vertretersystem $(\mathcal{E}(G)/G)'$ mitsamt den zugehörigen Kettennormalisatoren in G und $\mathrm{Aut}(G)$, das genau 15 nichttriviale Ketten besitzt und in folgender Tabelle aufgeführt ist:

Ketten C	$(-1)^{\lvert C\rvert}$	$N_{\mathrm{Suz}}(C)$	$N_{\mathrm{Aut(Suz)}}(C)$
C_1	$-$	$N_1 = 2_-^{1+6} \cdot U_4(2)$	$M_1 = 2_-^{1+6} \cdot U_4(2).2$
C_3	$-$	$N_3 = 2^{2+8} : (A_5 \times S_3)$	$M_3 = 2^{2+8} : (S_5 \times S_3)$
C_7	$-$	$N_7 = (A_4 \times L_3(4)) : 2_1$	$M_7 = (A_4 \times L_3(4) : 2_3) : 2$
C_8	$-$	$N_8 = 2^2.3^3.2^{2+2}$	$M_8 = 2^2.3^3.2^{2+2+1}$
C_{17}	$-$	$N_{17} = 2^{4+6} : 3A_6$	$M_{17} = 2^{4+6} : 3S_6$
$C_{1,3}$	$+$	$N_{1,3} = 2^{2+4} \cdot (2 \times 2^4.A_5)$	$M_{1,3} = 2^{2+4} \cdot (2 \times 2^4.S_5)$
$C_{2,8}$	$+$	$N_{2,8} = 3^2 : 2^{3+3}$	$M_{2,8} = 3^2 : 2^{3+3+1}$
$C_{8,14}$	$+$	$N_{8,14} = 2^3 \cdot (2^2 \times S_3)$	$M_{8,14} = 2^{3+1} \cdot (2^2 \times S_3)$
$C_{3,17}$	$+$	$N_{3,17} = 2^{2+8} : (S_3 \times A_4)$	$M_{3,17} = 2^{2+8} : (S_3 \times S_4)$
$C_{9,17}$	$+$	$N_{9,17} = 2^{4+6+2}.(3 \times S_3)$	$M_{9,17} = 2^{4+6+2} : (S_3 \times S_3)$
$C_{7,20}$	$+$	$N_{7,20} = 2^{4+2}.3.S_4$	$M_{7,20} = 2^{4+2}.3.(2 \times S_4)$
$C_{7,26}$	$+$	$N_{7,26} = A_4 \times 2^4.A_5$	$M_{7,26} = (A_4 \times 2^4.A_5) : 2$
$C_{2,8,14}$	$-$	$N_{2,8,14} = 2^{3+3}$	$M_{2,8,14} = 2^{3+3+1}$
$C_{3,9,17}$	$-$	$N_{3,9,17} = 2^{4+6+1}.A_4$	$M_{3,9,17} = 2^{4+6+1}.S_4$
$C_{7,20,26}$	$-$	$N_{7,20,26} = 2^{6+2}.3^2$	$M_{7,20,26} = 2^{6+2}.3^2.2$

Neben diesen 15 Ketten ist noch die triviale Kette C_0 der Länge 0 zu betrachten.

Warnung: Aus dem in Abb. 6.1 gegebenen Poset der Konjugiertenklassen von elementar-abelschen 2-Untergruppen von G lassen sich die Konjugiertenklassen der elementaren 2-Ketten von G nicht unmittelbar ablesen! Es existiert beispielsweise kein Vertretersystem $\{E_1, \ldots, E_{26}\}$ der Konjugiertenklassen von elementar-abelschen 2-Untergruppen von G, so daß es ein Vertretersystem $\mathcal{E}(G)/G$ der Konjugiertenklassen von elementaren 2-Ketten von G gibt, dessen sämtliche Ketten ausschließlich aus den Untergruppen $E_1, \ldots, E_{26}$ bestehen. (Wie man an der Konstellation $E_3 - E_{10} - E_5 - E_{11}$ in Abb. 6.1 erkennen kann, existiert nicht einmal ein Vertretersystem $\{E_1, \ldots, E_{26}\}$ von elementar-abelschen 2-Untergruppen von G, das sämtliche durch Abb. 6.1 gegebene Inklusionen erfüllt.) Die Bezeichnung der Ketten „$C_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$" bedeute, daß diese Kette von der Form $1 < P_{i_1} < P_{i_2} < \cdots < P_{i_k}$ ist, wobei P_{i_j} zu E_{i_j} aus dem oben genannten Vertretersystem für $j = 1, \ldots, k$ konjugiert ist. Die Bezeichnung wurde so gewählt, um zumindest einen gewissen Eindruck von der Struktur (z.B. der Länge der Kette) auszudrücken.

Zunächst ist die invariante Vermutung für G zu verifizieren, d.h. es sind die Summen (6.5) auszuwerten.

Die Normalisatoren N_1, N_3, N_7 und N_{17} sind maximale Untergruppen von Suz. Ihre Charaktertafeln findet man im Atlas [CCN+85] oder der GAP -Bibliothek. Die Charaktertafeln der übrigen Kettennormalisatoren $N_G(C)$ lassen sich wie in Abschnitt 6.4 dargelegt mit Hilfe des Dixon-Schneider-Algorithmus' berechnen.

Mit Hilfe des GAP-Befehls `PrimeBlocks` stellt man fest: Suz hat außer dem Hauptblock B_0 genau einen weiteren 2-Block B_1. Neben dem Hauptblock besitzen N_7, N_8 und $N_{2,8}$ noch jeweils genau einen weiteren 2-Block, der mit b_7, b_8 bzw. $b_{2,8}$ bezeichnet sei. Aus Bemerkung 6.4.2,(a) folgt: Der Hauptblock von N_7, N_8 und $N_{2,8}$ induziert B_0, und für die übrigen Blöcke gilt:

$$b_7^G = b_8^G = b_{2,8}^G = B_1 \ .$$

Alle weiteren Kettennormalisatoren besitzen jeweils nur den Hauptblock, der nach Bemerkung 6.4.2,(a) den Hauptblock B_0 von G induziert. Die Fusionen der Klassen der Kettennormalisatoren $N_G(C)$ und $N_{\mathrm{Aut}(G)}(C)$ in die Klassen von Suz bzw. Suz:2 werden in diesem Fall also nicht benötigt.

Wegen $\nu_2(|G|) = 13$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen (6.5) für d nur die Werte $d = 1, \dots, 13$ von Interesse, da für $d > 13$ die Summen (6.5) trivialerweise verschwinden.

Die Bestimmung der Trägheitsfaktoren und das Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 liefern die folgenden Charakteranzahlen $k(C, B_0, d, H)$ für den Hauptblock B_0 von G:

d=	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$k(C_0, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	.	.	.	.	4	8
$-k(C_1, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	-10	.	-2	.	-4	-8
$-k(C_3, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	.	-4	.	.	-4	-8
$-k(C_7, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	-4	-8	.	.	.	.
$-k(C_{17}, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	.	.	-4	-8	-4	-8
$k(C_{1,3}, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	2	4	2	.	4	8
$k(C_{3,17}, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	.	4	4	8	4	8
$k(C_{9,17}, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	10	.	10	8	4	8
$k(C_{7,20}, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	4	8	.	.	.	.
$k(C_{7,26}, B_0, d, \{1\})$	.	.	2	.	24	.	.	.	.	.
$-k(C_{3,9,17}, B_0, d, \{1\})$	.	.	.	.	-2	-4	-10	-8	-4	-8
$-k(C_{7,20,26}, B_0, d, \{1\})$	.	.	-2	.	-24	.	.	.	.	.

d=	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$k(C_0, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	1	.	.	2	.	.	3	8	4	8
$-k(C_1, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	-1	.	-1	-2	-2	.	-3	-12	-4	-8
$-k(C_3, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	-2	.	-4	-3	-8	-8	-8
$-k(C_7, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-1	-4	-8	-8	.	.	.	.
$-k(C_8, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	-1	-6	-8	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{17}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	.	.	-3	-8	-4	-8
$k(C_{1,3}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	1	2	2	4	3	12	8	8
$k(C_{2,8}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	1	6	8	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{8,14}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	1	6	8	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{3,17}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	.	4	3	8	8	8
$k(C_{9,17}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	2	.	11	12	4	8
$k(C_{7,20}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	1	4	8	8	.	.	.	.
$k(C_{7,26}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	2	.	8	.	.	.	.	.
$-k(C_{2,8,14}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	-1	-6	-8	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{3,9,17}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	-2	-4	-11	-12	-8	-8
$-k(C_{7,20,26}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-2	.	-8	.	.	.	.	.

In obigen Tabellen wurden der Übersichtlichkeit halber Nullen durch Punkte ersetzt. Die Spalten für $d = 1$, 2 und 3 wurden weggelassen, da sie nur Nullen enthalten. Ebenso sind in den Tabellen die Zeilen nicht aufgeführt, in denen ausschließlich Nullen auftreten. Da in obiger Tabelle sämtliche Spaltensummen gleich 0 sind, ist daher die invariante Vermutung und damit auch die gewöhnliche Vermutung für den Hauptblock B_0 nachgewiesen.

Für den Block B_1 vom Defekt 3 von Suz erhält man analog:

$$k(C_0, B_1, 2, \mathbb{Z}_2) = k(C_7, B_1, 2, \mathbb{Z}_2) =$$
$$k(C_8, B_1, 2, \mathbb{Z}_2) = k(C_{2,8}, B_1, 2, \mathbb{Z}_2) = 1$$

sowie

$$k(C_0, B_1, 3, \mathbb{Z}_2) = k(C_7, B_1, 3, \mathbb{Z}_2) =$$
$$k(C_8, B_1, 3, \mathbb{Z}_2) = k(C_{2,8}, B_1, 3, \mathbb{Z}_2) = 4\ .$$

Die übrigen Ketten liefern zu den alternierenden Summen in (6.5) keinen Beitrag. Wegen $(-1)^{|C_0|} = (-1)^{|C_{2,8}|} = 1$ und $(-1)^{|C_7|} = (-1)^{|C_8|} = -1$ verschwinden auch hier die alternierenden Summen in (6.5) für $B = B_1$. Insgesamt ist somit die Gültigkeit der invarianten (und damit der gewöhnlichen) Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ und $p = 2$ gezeigt.

Zum Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung für $G^* = 2.\mathrm{Suz}$ und $p = 2$ sei ζ der nichttriviale lineare Charakter von $Z(2.\mathrm{Suz})$. Wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* und M_i^* in 2.Suz der Kettennormalisatoren N_i bzw. M_i. Anschließend lassen sich wieder - wie in Abschnitt 6.3 beschrieben - die Charaktertafeln der N_i^* sowie ihre Fusionen in 2.Suz berechnen. Es sei $Z := Z(2.\mathrm{Suz})$; dann gilt $Z \leq N_i^*$ für jeden Kettennormalisator N_i^*. Gesucht sind nun die irreduziblen Charaktere χ von N_i^*, die über ζ liegen, d.h. für die $\chi|_Z = \zeta$ gilt. Es sei z das nichttriviale zentrale Element in 2.Suz, also $Z = \langle z \rangle$. Anhand der berechneten Fusionen der Konjugiertenklassen von N_i^* in die Klassen von 2.Suz läßt sich nun für jedes i die Konjugiertenklasse K_i von N_i^* bestimmen, die z enthält. Die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über ζ liegen, sind dann genau die Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(N_i^*)$, für die $\chi(1) = -\chi(z)$ gilt. Somit lassen sich die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über ζ liegen, an der zu K_i gehörigen Spalte der Charaktertafel von N_i^* ablesen.

Mit Hilfe des GAP-Befehls `PrimeBlocks` stellt man fest: 2.Suz hat außer dem Hauptblock $B_0(\zeta)$ genau einen weiteren 2-Block $B_1(\zeta)$, und beide Blöcke liegen über ζ. Neben dem Hauptblock besitzen N_7^*, N_8^* und $N_{2,8}^*$ noch jeweils genau einen weiteren 2-Block, der mit $b_7(\zeta)$, $b_8(\zeta)$ bzw. $b_{2,8}(\zeta)$ bezeichnet sei. Aus Bemerkung 6.4.4,(a) folgt: Der Hauptblock von N_7^*, N_8^* und $N_{2,8}^*$ induziert $B_0(\zeta)$, und für die übrigen Blöcke gilt:

$$b_7(\zeta)^G = b_8(\zeta)^G = b_{2,8}(\zeta)^G = B_1(\zeta) \ .$$

Alle weiteren Kettennormalisatoren besitzen jeweils nur den Hauptblock, der nach Bemerkung 6.4.4,(a) den Hauptblock $B_0(\zeta)$ von G^* induziert. Die Fusionen der Klassen der Kettennormalisatoren N_i^* in die Klassen von 2.Suz werden in diesem Fall also zur Bestimmung der Brauerkorrespondenten nicht benötigt.

Wegen $\nu_2(|G|) = 14$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in 6.4 für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 14$ von Interesse, da für $d > 14$ die Summanden in (6.4) trivialerweise verschwinden.

Die Bestimmung der Trägheitsfaktoren und das Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 liefern die folgenden Charakteranzahlen $k(C, B_0(\zeta), d, H)$ für den Hauptblock $B_0(\zeta)$ von G^*:

d=	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k(C_0, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	.	.	4	.	12
$-k(C_1, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	-2	.	-8	-4	-12
$-k(C_3, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	-2	-4	-2	.	-12
$-k(C_7, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	-4	-2	.	.	.	.
$-k(C_8, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	-2	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	.	.	-12	.	-12
$k(C_{1,3}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	.	4	2	4	12
$k(C_{8,14}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	2	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{3,17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	2	4	10	.	12
$k(C_{9,17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	2	4	16	4	12
$k(C_{7,20}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	4	2	.	.	.	.
$k(C_{7,26}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	8	8	.	.	.	.	.
$-k(C_{3,9,17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	.	.	.	-8	-10	-4	-12
$-k(C_{7,20,26}, B_0(\zeta), d, \zeta, \{1\})$	.	.	-8	-8	.	.	.	.	.
d=	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k(C_0, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	1	.	1	4	.	3	.	4
$-k(C_1, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	-1	.	.	-3	-2	-5	-4	-4
$-k(C_3, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	-1	-3	-2	-3	.	-4
$-k(C_7, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-4	-3	-2	.	.	.	.
$-k(C_8, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	-1	-6	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	-2	.	-3	.	-4
$k(C_{1,3}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	2	4	5	4	4
$k(C_{2,8}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	4	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{8,14}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	1	6	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{3,17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	1	2	3	.	4
$k(C_{9,17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	1	2	5	4	4
$k(C_{7,20}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	4	3	2	.	.	.	.
$k(C_{7,26}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	1	4	.	.	.	.	.
$-k(C_{2,8,14}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	-4	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{3,9,17}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	.	.	.	-4	-5	-4	-4
$-k(C_{7,20,26}, B_0(\zeta), d, \zeta, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-1	-4	.	.	.	.	.

(Spalten, die nur Nullen enthalten, sind in obiger Tabelle nicht aufgeführt.)

Da in den obigen beiden Tabellen die Spaltensummen jeweils verschwinden, ist somit die projektiv-invariante Vermutung für $G^* = 2.\mathrm{Suz}$ und den Hauptblock $B_0(\zeta)$ bestätigt.

$B_1(\zeta)$ hat Defekt 4, so daß für die Berechnung der Charakteranzahlen $k(C, B_1(\zeta), d, \zeta)$ nur die Defekte $d = 1, 2, 3$ und 4 interessant sind. Für $d = 1$ und $d = 4$ ist $k(C, B_1(\zeta), d, \zeta)$ gleich Null für alle Ketten C. Für $d = 2$ zählt man:

$$k(C_0, B_1(\zeta), 2, \zeta, \mathbb{Z}_2) = 2$$

sowie

$$k(C_7, B_1(\zeta), 2, \zeta, \mathbb{Z}_2) = k(C_8, B_1(\zeta), 2, \zeta, \mathbb{Z}_2) = 1 \ ;$$

und für $d = 3$:

$$k(C_0, B_1(\zeta), 3, \zeta, \mathbb{Z}_2) = k(C_7, B_1(\zeta), 2, \zeta, \mathbb{Z}_2) =$$
$$k(C_8, B_1(\zeta), 2, \zeta, \mathbb{Z}_2) = k(C_{2,8}, B_1(\zeta), 2, \zeta, \mathbb{Z}_2) = 2 \ .$$

Alle anderen Ketten geben für $d = 2$, $d = 3$ und $B_1(\zeta)$ keinen Beitrag zu den alternierenden Summen in (6.4). Wegen $(-1)^{|C_0|} = (-1)^{|C_{2,8}|} = 1$ und $(-1)^{|C_7|} = 1(-1)^{|C_8|} = -1$ sind also auch für $d = 2$ und $d = 3$ und $B_1(\zeta)$ die alternierenden Summen (6.4) identisch Null. Hiermit ist die projektiv-invariante Vermutung für 2.Suz nachgewiesen.

Gemäß Abschnitt 6.1 bleibt also nur noch die projektive Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ im Fall $p = 2$ zu verifizieren. Die Trägheitsfaktoren der Charaktere müssen somit nicht berücksichtigt werden.

Es sei zunächst $G^* = 3.\mathrm{Suz}$. G^* besitzt genau vier 2-Blöcke mit den Defekten 13, 3, 13 und 13. Es sei $Z := Z(3.\mathrm{Suz})$ und z ein Erzeuger von Z. Es sei ferner η einer der beiden treuen linearen Charaktere von Z. Dann liegt genau einer der beiden Blöcke vom Defekt 13, die nicht der Hauptblock sind, über η. Dieser Block sei als $B_1(\eta)$ bezeichnet. Wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* der Kettennormalisatoren N_i in 3.Suz. Anschließend lassen sich wieder - wie in Abschnitt 6.3 beschrieben - die Charaktertafeln der N_i^* berechnen. Da $B_1(\eta)$ der einzige Block von 3.Suz ist, der über η liegt, gilt nach Bemerkung 6.4.3,(b) für jeden Block $b(\eta)$ eines Kettennormalisators N_i^*, der über η liegt: $b(\eta)^{G^*} = B_1(\eta)$. Es sind also nur noch die irreduziblen Charaktere der Normalisatoren N_i^* zu bestimmen, die über η liegen. Hierzu werden die Fusionen der Klassen von N_i^* in 3.Suz benötigt. Für jedes Urbild N_i^* lassen sich mittels `PossibleClassFusions` zwei Konjugiertenklassen $K_{i,1}$ und $K_{i,2}$ von N_i^* bestimmen, so daß

$$(z \in K_{i,1} \text{ und } z^2 \in K_{i,2}) \text{ oder } (z^2 \in K_{i,1} \text{ und } z \in K_{i,2})$$

gilt. Wegen

$$|\{\chi \in \mathrm{Irr}(N_i^*) | \chi|_Z = \chi(1) \cdot \eta\}| = |\{\chi \in \mathrm{Irr}(N_i^*) | \chi|_Z = \chi(1) \cdot \overline{\eta}\}|$$

(wobei $\overline{\eta}$ den zu η komplex konjugierten Charakter bezeichnet) lassen sich also die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über η liegen, an der Charaktertafel abzählen und damit auch die Charakteranzahlen $k(C_i, B_1(\eta), d, \eta)$, wobei C_i die zu N_i^* gehörige Kette bezeichnet.

Wegen $\nu_2(|G^*|) = 13$ sind hierbei für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 13$ zu betrachten, da für $d > 13$ die Summanden in (6.6) trivialerweise verschwinden.

Durch Abzählen der Charaktere erhält man für den Block $B_1(\eta)$ somit:

d=	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$k(C_0, B_1(\eta), d, \eta)$	1	.	.	2	.	.	3	8	8	16
$-k(C_1, B_1(\eta), d, \eta)$	-1	.	-1	-2	-12	.	-5	-12	-8	-16
$-k(C_3, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	.	-2	.	-8	-3	-8	-12	-16
$-k(C_7, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	-1	-4	-12	-16	.	.	.	.
$-k(C_8, B_1(\eta), d, \eta)$	-1	-8	-16	.	.	.	.	.	.	
$-k(C_{17}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	.	.	.	.	-7	-16	-8	-16
$k(C_{1,3}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	1	2	4	8	5	12	12	16
$k(C_{2,8}, B_1(\eta), d, \eta)$	1	8	16	.	.	.	.	.	.	
$k(C_{8,14}, B_1(\eta), d, \eta)$	1	8	16	.	.	.	.	.	.	
$k(C_{3,17}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	.	.	.	8	7	16	12	16
$k(C_{9,17}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	.	.	12	.	21	20	8	16
$k(C_{7,20}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	1	4	12	16.	.	.	.	
$k(C_{7,26}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	4	.	32	.	.	.	.	
$-k(C_{2,8,14}, B_1(\eta), d, \eta)$	-1	-8	-16	.	.	.	.	.	.	
$-k(C_{3,9,17}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	.	.	-4	-8	-21	-20	-12	-16
$-k(C_{7,20,26}, B_1(\eta), d, \eta)$	.	.	-4	.	-32	.	.	.	.	

(In der Tabelle werden die Spalten für die Werte $d = 1, 2, 3$ nicht aufgeführt, da in diesen Spalten nur Nullen auftreten.)

Da in obiger Tabelle sämtliche Spaltensummen gleich Null sind und $B_1(\eta)$ der einzige Block von $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ ist, der Charaktere enthält, die über η liegen, ist somit die projektive Vermutung für 3.Suz und $p = 2$ bewiesen.

Für $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ kann man analog vorgehen:

G^* besitzt genau vier 2-Blöcke mit den Defekten 14, 4, 14 und 14. Es sei $Z := Z(6.\mathrm{Suz})$ und ξ einer der beiden treuen linearen Charaktere von Z. Dann liegt genau einer der beiden Blöcke vom Defekt 14, die nicht der Hauptblock sind, über ξ. Dieser Block sei als $B_1(\xi)$ bezeichnet. Das weitere Vorgehen verläuft analog zum Fall $G^* = 3.\mathrm{Suz}$.

Wegen $\nu_2(|G^*|) = 14$ sind hierbei für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 14$ zu betrachten, da für $d > 14$ die Summanden in 6.6 trivialerweise verschwinden.

Durch Abzählen der Charaktere erhält man für den Block $B_1(\xi)$ somit:

d=	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k(C_0, B_1(\xi), d, \xi)$	.	1	.	1	4	.	7	.	16
$-k(C_1, B_1(\xi), d, \xi)$	.	-1	.	.	-5	-2	-13	-8	-16
$-k(C_3, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	-1	-5	-6	-5	.	-16
$-k(C_7, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	-4	-7	-4	.	.	.	.
$-k(C_8, B_1(\xi), d, \xi)$	-1	-8	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{17}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	.	-2	.	-15	.	-16
$k(C_{1,3}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	.	2	8	7	8	16
$k(C_{2,8}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	4	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{8,14}, B_1(\xi), d, \xi)$	1	8	.	.	.	.	.	.	.
$k(C_{3,17}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	.	3	6	13	.	16
$k(C_{9,17}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	.	3	6	21	8	16
$k(C_{7,20}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	4	7	4	.	.	.	.
$k(C_{7,26}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	9	12	.	.	.	.	.
$-k(C_{2,8,14}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	-4	.	.	.	.	.	.	.
$-k(C_{3,9,17}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	.	.	-12	-15	-8	-16
$-k(C_{7,20,26}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	-9	-12	.	.	.	.	.

(In der Tabelle werden die Spalten für die Werte $d = 1, 2, 3, 13, 14$ nicht aufgeführt, da in diesen Spalten nur Nullen auftreten.)

Da in der Tabelle sämtliche Spaltensummen Null ergeben, ist damit die projektive Vermutung für 6.Suz bestätigt. Mit den in Abschnitt 6.1 vorgenommen Reduktionen ist somit insgesamt die projektiv-invariante Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ und $p = 2$ nachgewiesen.

6.6 Der Fall p=3

Im Fall $p = 3$ erhält man mit den in den Abschnitten 6.2 bis 6.4 beschriebenen Methoden folgende Ergebnisse:

Die Unterfunktion `ElemAbSubgroups` des Programms `ElemChains` liefert für $p = 3$ genau 22 Konjugiertenklassen von nichttrivialen elementar-abelschen 3-Untergruppen von Suz mit Vertretern $E_1, \ldots, E_{22}$. Die graphische Darstellung des Posets läßt sich Abb. 6.2 entnehmen.

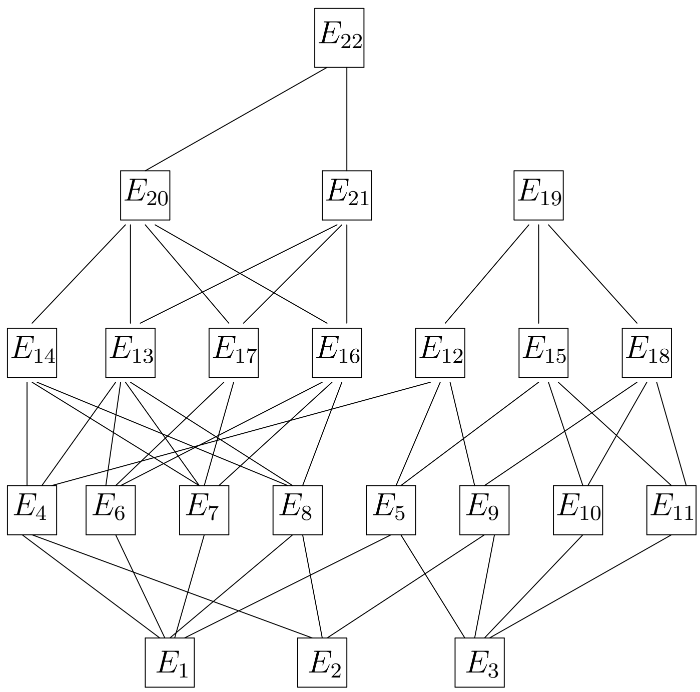

Abb. 6.2: Poset der Konjugiertenklassen der nichttrivialen elementar-abelschen 3-Untergruppen von G

Das Programm `ElemChains` liefert in diesem Fall ein gekürztes Vertretersystem samt Kettennormalisatoren mit genau 9 nichttrivialen Ketten der folgenden Art:

Ketten C	$(-1)^{\|C\|}$	$N_{\text{Suz}}(C)$	$N_{Aut(\text{Suz})}(C)$
C_2	$-$	$N_2 = 3_2 \cdot U_4(3) : 2'_3$	$M_2 = 3U_4(3).(2^2)_{133}$
C_4	$-$	$N_4 = 3^{2+4} : 2(A_4 \times 2^2).2$	$M_4 = 3^{2+4} : 2(S_4 \times D_8)$
C_{10}	$-$	$N_{10} = (3^2 : 4 \times A_6) \cdot 2$	$M_{10} = (3^2 : 8 \times A_6) \cdot 2$
C_{22}	$-$	$N_{22} = 3^5 : M_{11}$	$M_{22} = 3^5 : (M_{11} \times 2)$
$C_{2,4}$	$+$	$N_{2,4} = 3^{2+4} : 2(S_4 \times 2)$	$M_{2,4} = 3^{2+4} : 2(S_4 \times 2).2$
$C_{10,19}$	$+$	$N_{10,19} = 3^4.2^{2+3}$	$M_{10,19} = 3^4.2^{2+3+1}$
$C_{2,22}$	$+$	$N_{2,22} = 3^5 : M_{10}$	$M_{2,22} = 3^5 : M_{10}.2$
$C_{4,22}$	$+$	$N_{4,22} = 3^{5+2} : 2^{2+2}$	$M_{4,22} = 3^{5+2} : 2^{2+2+1}$
$C_{2,4,22}$	$-$	$N_{2,4,22} = 3^{5+2} : Q_8$	$M_{2,4,22} = 3^{5+2} : 2^{2+2}$

Neben diesen 9 Ketten ist natürlich noch die triviale Kette C_0 der Länge 0 zu betrachten.

Man beachte, daß sich auch in diesem Fall aus dem in Abb. 6.2 gegebenen Poset nicht unmittelbar ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von elementaren 3-Ketten von G ablesen läßt.

Es soll zunächst die invariante Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ und $p = 3$ verifiziert werden, d.h. es sind die alternierenden Summen (6.5) auszuwerten.

Die Normalisatoren N_2, N_4, N_{10} und N_{22} sind maximale Untergruppen von Suz. Ihre Charaktertafeln findet man im Atlas [CCN+85] und die zugehörigen Untergruppenfusionen in der GAP-Bibliothek. Die Charaktertafeln der übrigen Kettennormalisatoren $N_G(C)$ lassen sich – wie in Abschnitt 6.3 geschildert – mit Hilfe des Dixon-Schneider-Algorithmus' berechnen.

Mit Hilfe des GAP-Befehls `PrimeBlocks` stellt man fest: Suz besitzt genau drei 3-Blöcke: den Hauptblock B_0 mit Defekt 7, sowie einen Block B_1 mit Defekt 2 und einen Block B_2 mit Defekt 1. N_2 und N_{10} haben neben dem Hauptblock noch jeweils genau einen weiteren 3-Block, der mit b_2 bzw. b_{10} bezeichnet sei. Da die Fusionen der Konjugiertenklassen von N_2 und N_{10} in Suz bekannt sind, lassen sich mit Hilfe von Bemerkung 6.4.2, (a) und (c) die Brauerkorrespondenten von b_2 und b_{10} bestimmen:

$$b_2^G = B_2 \;\text{ sowie }\; b_{10}^G = B_1.$$

Die übrigen Normalisatoren besitzen nur den Hauptblock, der nach Bemerkung 6.4.2, (a) stets den Hauptblock von G induziert.

Wegen $\nu_3(|G|) = 7$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in (6.5) für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 7$ von Interesse, da für $d > 7$ die Summanden in (6.5) trivialerweise verschwinden.

Die Bestimmung der Trägheitsfaktoren und das Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 liefern die folgenden Charakteranzahlen $k(C, B_0, d, H)$ für den Hauptblock B_0 von G:

	$d \leq 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
$k(C_0, B_0, d, \{1\})$	.	.	2	2	6
$-k(C_2, B_0, d, \{1\})$	.	.	-4	.	-4
$-k(C_4, B_0, d, \{1\})$	.	.	-12	-2	-6
$-k(C_{10}, B_0, d, \{1\})$	.	-10	.	.	.
$-k(C_{22}, B_0, d, \{1\})$	.	.	-2	.	-6
$k(C_{2,4}, B_0, d, \{1\})$	.	.	8	.	4
$k(C_{10,19}, B_0, d, \{1\})$	.	10	.	.	.
$k(C_{2,22}, B_0, d, \{1\})$	.	.	4	2	4
$k(C_{4,22}, B_0, d, \{1\})$	.	.	12	.	6
$k(C_{2,4,22}, B_0, d, \{1\})$	.	.	-8	-2	-4

	$d \leq 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
$k(C_0, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	4	1	7	12
$-k(C_2, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	-5	-8	-6	-8
$-k(C_4, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	-4	-6	-7	-12
$-k(C_{10}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	-20	.	.	.
$-k(C_{22}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-1	-3	-12
$-k(C_{2,4}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	5	10	6	8
$k(C_{10,19}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	20	.	.	.
$k(C_{2,22}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	8	1	8
$k(C_{4,22}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	6	3	12
$k(C_{2,4,22}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-10	-1	-8

Da in den Tabellen sämtliche Spaltensummen gleich 0 sind, ist somit die invariante und damit die gewöhnliche Vermutung für den Hauptblock B_0 bestätigt.

Für den Block B_1 vom Defekt 2 von Suz ergibt sich:

$$k(C_0, B_1, 2, \{1\}) = k(C_3, B_1, 2, \{1\}) = 2$$

sowie

$$k(C_0, B_1, 2, \mathbb{Z}_2) = k(C_3, B_1, 2, \mathbb{Z}_2) = 6\ .$$

Die übrigen Ketten liefern zu den alternierenden Summen keinen Beitrag. Wegen

$$(-1)^{|C_0|} = 1 \text{ und } (-1)^{|C_3|} = -1$$

ist somit die gewöhnliche und invariante Vermutung auch für den Block B_1 bestätigt.

Da der Block B_2 zyklischen Defekt hat, ist die invariante Vermutung auch für diesen Block nach [Dad96] erfüllt. Insgesamt folgt hieraus die Gültigkeit der invarianten und damit der gewöhnlichen Vermutung für $G = \text{Suz}$ und $p = 3$.

Zum Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung für $G^* = 2.\text{Suz}$ und $p = 3$ sei ζ der nichttriviale lineare Charakter von $Z(2.\text{Suz})$. Wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* und M_i^* in 2.Suz der Kettennormalisatoren N_i bzw. M_i. Die Charaktertafel von N_2^* mitsamt der Fusionen in 2.Suz konnte Dr. Thomas Breuer aus den Tafeln von N_2 und 2.Suz bestimmen. Diese Tafel ist in GAP durch

```
CharacterTableIsoclinic( CharacterTable( "6_2.U4(3).2_3'" ) )
```

verfügbar. Die Charaktertafeln der restlichen Kettennormalisatoren N_i^* lassen sich leicht, wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, mit Hilfe des Dixon-Schneider-Algorithmus' berechnen. Die Fusionen der Klassen von N_i^* in 2.Suz lassen sich wieder mit `PossibleClassFusions` bestimmen.

Es sei $Z := Z(2.\mathrm{Suz})$; dann gilt $Z \leq N_i^*$ für jeden Kettennormalisator N_i^*. Gesucht sind nun die irreduziblen Charaktere χ von N_i^*, die über ζ liegen, d.h. für die $\chi|_Z = \zeta$ gilt. Es sei z das nichttriviale zentrale Element in 2.Suz, also $Z = \langle z \rangle$. Anhand der berechneten Fusionen der Konjugiertenklassen von N_i^* in die Klassen von 2.Suz läßt sich nun für jedes i die Konjugiertenklasse K_i von N_i^* bestimmen, die z enthält. Die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über ζ liegen, sind dann genau die Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(N_i^*)$, für die $\chi(1) = -\chi(z)$ gilt. Somit lassen sich die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über ζ liegen, an der zu K_i gehörigen Spalte der Charaktertafel von N_i^* ablesen.

Mit Hilfe des GAP-Befehls `PrimeBlocks` stellt man fest: 2.Suz hat genau einen 3-Block, der über ζ liegt. Dieser hat Defekt 7 und sei mit $B_1(\zeta)$ bezeichnet. Alle weiteren Kettennormalisatoren N_i^* besitzen jeweils genau einen 3-Block $b_i(\zeta)$, der über ζ liegt. Aus Bemerkung 6.4.4, (b) folgt somit:

$$b_i(\zeta)^{G^*} = B_1(\zeta) \ .$$

Die Fusionen der Klassen der Kettennormalisatoren N_i^* in die Klassen von 2.Suz werden in diesem Fall also zur Bestimmung der Brauerkorrespondenten nicht benötigt.

Wegen $\nu_3(|G|) = 7$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in (6.4) für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 7$ von Interesse, da für $d > 7$ die Summanden in (6.4) trivialerweise verschwinden.

Die Bestimmung der Trägheitsfaktoren und das Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 liefern die folgenden Charakteranzahlen $k(C, B_1(\zeta), d, H)$ für den Block $B_1(\zeta)$ von G^*:

	$d \leq 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
$k(C_0, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	4	2	4	6
$-k(C_2, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	-4	-4	-2	-4
$-k(C_4, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	-4	-12	-4	-6
$-k(C_{10}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	-8	.	.	.
$-k(C_{22}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	.	-2	.	-6
$k(C_{2,4}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	4	8	2	4
$k(C_{10,19}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	8	.	.	.
$k(C_{2,22}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	.	4	2	4
$k(C_{4,22}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	.	12	.	6
$k(C_{2,4,22}, B_1(\zeta), d, \{1\})$	.	.	-8	-2	-4

	$d \leq 3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$	$d=7$
$k(C_0, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	1	2	12
$-k(C_2, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	-1	-8	-1	-8
$-k(C_4, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-6	-2	-12
$-k(C_{10}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	-16	.	.	.
$-k(C_{22}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-1	-3	-12
$k(C_{2,4}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	1	10	1	8
$k(C_{10,19}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	16	.	.	.
$k(C_{2,22}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	8	1	8
$k(C_{4,22}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	6	3	12
$k(C_{2,4,22}, B_1(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	.	-10	-1	-8

Da in den obigen beiden Tabellen sämtliche Spaltensummen Null sind, ist damit die projektiv-invariante Vermutung für 2.Suz und $p = 3$ verifiziert.

Gemäß Abschnitt 6.1 bleibt also nur noch die projektive Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ im Fall $p = 3$ zu verifizieren. Die Trägheitsfaktoren der Charaktere müssen somit nicht berücksichtigt werden.

Es sei zunächst $G^* = 3.\mathrm{Suz}$. G^* besitzt genau drei 3-Blöcke mit den Defekten 8, 3 und 2. Es sei $Z := Z(3.\mathrm{Suz})$ und z ein Erzeuger von Z. Es sei ferner η einer der beiden treuen linearen Charaktere von Z. Dann liegen alle drei Blöcke von 3.Suz über η. Es sei $B_0(\eta)$ der Hauptblock von 3.Suz, $B_1(\eta)$ sei der Block vom Defekt 3 und $B_2(\eta)$ der Block vom Defekt 2. Wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* der Kettennormalisatoren N_i in 3.Suz. Anschließend lassen sich wieder - wie in Abschnitt 6.3 beschrieben - die Charaktertafeln der N_i^* berechnen. Mittels `PossibleClassFusions` kann man die Fusionen der Klassen von N_i^* in 3.Suz bis auf Tafelautomorphismen von N_i^* eindeutig bestimmen, d.h. die möglichen Fusionen liegen in einer Bahn unter der Operation der Tafelautomorphismen. Wie man nachrechnet, lassen die Tafelautomorphismen von N_i^* die 3-Blöcke von N_i^* invariant. Daher sind die Charakteranzahlen $k(C_i, B_j(\eta), d, \eta)$ unabhängig von der Wahl des Vertreters der Fusionen. Man kann also eine der berechneten möglichen Fusionen wählen.

Mit dem Befehl `PrimeBlocks` stellt man ferner fest: N_2^* und N_{10}^* haben neben dem Hauptblock noch jeweils genau einen weiteren 3-Block, der über η liegt und mit $b_2(\eta)$ bzw. $b_{10}(\eta)$ bezeichnet werde. Da die Fusionen der Konjugiertenklassen von N_2^* und N_{10}^* in Suz bekannt sind, lassen sich mit Hilfe von Bemerkung 6.4.3, (a) und (c) die Brauerkorrespondenten von $b_2(\eta)$ und $b_{10}(\eta)$ bestimmen:

$$b_2(\eta)^{G^*} = B_2(\eta) \text{ sowie } b_{10}(\eta)^{G^*} = B_1(\eta).$$

Die übrigen Kettennormalisatoren besitzen nur den Hauptblock, der über η liegt und nach Bemerkung 6.4.3, (a) stets den Hauptblock von G^* induziert.

Wegen $\nu_3(|G^*|) = 8$ sind hierbei für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 8$ zu betrachten, da für $d > 8$ die Summanden in (6.6) trivialerweise verschwinden.

Durch Abzählen der Charaktere erhält man für den Hauptblock $B_0(\eta)$ somit:

	$d \leq 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
$k(C_0, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	7	5	18
$-k(C_2, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	-8	-16	-9
$-k(C_4, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	-7	-20	-18
$-k(C_{10}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	-24	.	.	.
$-k(C_{22}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	.	-5	-18
$k(C_{2,4}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	8	22	9
$k(C_{10,19}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	24	.	.	.
$k(C_{2,22}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	.	16	9
$k(C_{4,22}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	.	20	18
$k(C_{2,4,22}, B_0(\eta), d, \eta)$	.	.	.	-22	-9

(Die Spalte für $d = 8$ wurde weggelassen, da sie nur Nullen enthält.)

Da in der Tabelle alle Spaltensummen Null sind, folgt hieraus die Gültigkeit der projektiven Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und den Hauptblock $B_0(\eta)$.

Für die Blöcke $B_1(\eta)$ und $B_2(\eta)$ ergibt sich:

$$k(C_0, B_1(\eta), 2, \eta) = k(C_3, B_1(\eta), 2, \eta) = 5$$

und

$$k(C_0, B_2(\eta), 2, \eta) = k(C_1, B_2(\eta), 2, \eta) = 3\ .$$

Die übrigen Ketten liefern keinen Beitrag zu den alternierenden Summen (6.6). Wegen $(-1)^{|C_0|} = 1$ und $(-1)^{|C_1|} = (-1)^{|C_3|} = -1$ folgt hieraus auch die projektive Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und die Blöcke $B_1(\eta)$ und $B_2(\eta)$.

Somit ist die Gültigkeit der projektiven Vermutung für 3.Suz nachgewiesen.

Nun ist noch die projektive Vermutung für $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ nachzuweisen.

Es sei $Z := Z(6.\mathrm{Suz})$ und ξ einer der beiden treuen linearen Charaktere von Z. Dann liegt genau ein Block von 6.Suz über ξ. Dieser Block sei als $B_1(\xi)$ bezeichnet. Nun kann man analog zum Fall $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ und $p = 2$ vorgehen.

Wegen $\nu_3(|G^*|) = 8$ sind hierbei für d nur die Werte $d = 1, \ldots, 8$ zu betrachten, da für $d > 8$ die Summanden in (6.6) trivialerweise verschwinden.

Durch Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 erhält man für den Block $B_1(\xi)$ somit:

	$d \leq 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$
$k(C_0, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	4	5	18
$-k(C_2, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	-5	-16	-9
$-k(C_4, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	-4	-20	-18
$-k(C_{10}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	-18	.	.	.
$-k(C_{22}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	-5	-18
$k(C_{2,4}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	5	22	9
$k(C_{10,19}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	18	.	.	.
$k(C_{2,22}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	16	9
$k(C_{4,22}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	20	18
$k(C_{2,4,22}, B_1(\xi), d, \xi)$	.	.	.	-22	-9

(In der Tabelle wird die Spalte für $d = 8$ nicht aufgeführt, da sie nur Nullen enthält.)

Da auch hier wieder alle Spaltensummen verschwinden, ist somit insgesamt die projektiv-invariante Vermutung für $G = \text{Suz}$ und $p = 3$ verifiziert.

6.7 Der Fall p=5

Mit den in Abschnitt 6.2 bis 6.4 beschriebenen Methoden erhält man im Fall $p = 5$ folgende Ergebnisse:

Analog zu den Fällen $p = 2$ und 3 erhält man in diesem Fall genau 3 Konjugiertenklassen von nichttrivialen elementar-abelschen 5-Untergruppen mit Vertretern E_1, E_2 und E_3. Das zugehörige Poset hat in diesem Fall eine sehr einfache Gestalt:

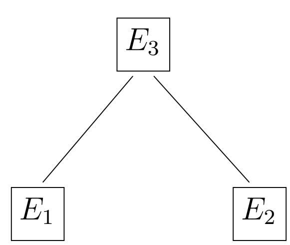

Abb. 6.3: Poset der Konjugiertenklassen der nichttrivialen elementar-abelschen 5-Untergruppen von G

Das Programm `ElemChains` liefert in diesem Fall ein gekürztes Vertretersystem samt Kettennormalisatoren mit genau 5 nichttrivialen Ketten:

Ketten C	$(-1)^{\|C\|}$	$N_{\mathrm{Suz}}(C)$	$N_{Aut(\mathrm{Suz})}(C)$
C_1	$-$	$N_1 = 5.(2 \times A_5).2$	$M_1 = 5.(2 \times A_5).2 \times 2$
C_2	$-$	$N_2 = 5.(2 \times A_6).2$	$M_2 = 5.(2 \times A_6).2^2$
C_3	$-$	$N_3 = 5^2.(4 \times S_3)$	$M_3 = 5^2.(2 \times 4 \times S_3)$
$C_{2,3}$	$+$	$N_{2,3} = 5^2.(2 \times 4)$	$M_{2,3} = 5^2.(2^2 \times 4)$
$C_{1,3}$	$+$	$N_{1,3} = 5^2.(2 \times 4)$	$M_{1,3} = 5^2.(2^2 \times 4)$

Neben diesen 5 Ketten ist natürlich noch die triviale Kette C_0 der Länge 0 zu betrachten.

Es soll zunächst die invariante Vermutung für $G = \mathrm{Suz}$ und $p = 5$ verifiziert werden, d.h. es sind die alternierenden Summen (6.5) auszuwerten.

Die Charaktertafeln der Kettennormalisatoren N_i lassen sich wie in Abschnitt 6.3 geschildert mit Hilfe des Dixon-Schneider-Algorithmus' berechnen.

Mithilfe des GAP-Befehls `PrimeBlocks` stellt man fest: $G = \mathrm{Suz}$ hat außer dem Hauptblock B_0 noch genau drei weitere 5-Blöcke B_1, B_2 und B_3 vom Defekt 1, die restlichen Blöcke haben Defekt 0. N_1 hat neben dem Hauptblock noch genau einen 5-Block b_1, und N_2 hat neben dem Hauptblock noch genau zwei 5-Blöcke b_2 und b_2' mit Defekten 1. Anhand der mittels `PossibleClassFusions` bestimmten Fusionen der Konjugiertenklassen von N_1 und N_2 in Suz lassen sich gemäß Bemerkung 6.4.2 (a) und (c) die Brauerkorrespondenten von b_1, b_2 und b_2' bestimmen:

$$b_1^G = B_3 \ , b_2^G = B_1 \text{ und } (b_2')^G = B_2.$$

Die übrigen Normalisatoren besitzen nur den Hauptblock, der nach Bemerkung 6.4.2, (a) stets den Hauptblock B_0 von G induziert.

Wegen $\nu_5(|G|) = 2$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in (6.5) für d nur die Werte $d = 1$ und 2 von Interesse, da für $d > 2$ die Summanden in (6.5) trivialerweise verschwinden.

Die Bestimmung der Trägheitsfaktoren und das Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 liefern die folgenden Charakteranzahlen $k(C, B_0, d, H)$ für den Hauptblock B_0 von G:

	d=1	d=2
$k(C_0, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	16
$-k(C_1, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	-14
$-k(C_2, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	-14
$-k(C_3, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	-16
$k(C_{2,3}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	14
$k(C_{1,3}, B_0, d, \mathbb{Z}_2)$	.	14

Die Hauptblöcke enthalten keine irreduziblen Charaktere mit Trägheitsfaktor $\{1\}$ und sind deshalb in der Tabelle nicht aufgeführt.

Für B_1, B_2 und B_3 erhält man weiter:

	d=1	d=2
$k(C_0, B_1, d, \{1\})$	2	.
$-k(C_2, B_1, d, \{1\})$	-2	.
$k(C_0, B_1, d, \mathbb{Z}_2)$	2	.
$-k(C_2, B_1, d, \mathbb{Z}_2))$	-2	.
$k(C_0, B_2, d, \{1\})$	4	.
$-k(C_2, B_2, d, \{1\})$	-4	.
$k(C_0, B_2, d, \mathbb{Z}_2)$	1	.
$-k(C_2, B_2, d, \mathbb{Z}_2)$	-1	.
$k(C_0, B_3, d, \mathbb{Z}_2)$	5	.
$-k(C_1, B_3, d, \mathbb{Z}_2)$	-5	.

In der obigen Tabelle sind nur die Ketten aufgeführt, die zu den alternierenden Summen (6.5) einen von Null verschiedenen Beitrag liefern. Man beachte außerdem:

$$k(C_0, B_3, d, \{1\}) = k(C_1, B_3, d, \{1\}) = 0.$$

Da in den obigen Tabellen sämtliche Spaltensummen gleich 0 sind, ist hiermit die invariante und gewöhnliche Vermutung für G =Suz und $p = 5$ bestätigt.

Zum Nachweis der projektiv-invarianten Vermutung für $G^* = 2.\text{Suz}$ und $p = 5$ sei ζ der nichttriviale lineare Charakter von $Z(2.\text{Suz})$. Wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* und M_i^* in 2.Suz der Kettennormalisatoren N_i bzw. M_i. Die Charaktertafeln der Urbilder N_i^* lassen sich leicht wie in Abschnitt 6.3 beschrieben mit Hilfe des Dixon-Schneider-Algorithmus' berechnen. Die Fusionen der Klassen von N_i^* in 2.Suz lassen sich wieder mit `PossibleClassFusions` bestimmen.

Es sei $Z := Z(2.\text{Suz})$; dann gilt $Z \leq N_i^*$ für jeden Kettennormalisator N_i^*. Gesucht sind nun die irreduziblen Charaktere χ von N_i^*, die über ζ liegen, d.h. für die $\chi|_Z = \zeta$ gilt. Es sei z das nichttriviale zentrale Element in 2.Suz, also $Z = \langle z \rangle$. Anhand der berechneten Fusionen der Konjugiertenklassen von N_i^* in die Klassen von 2.Suz läßt sich nun für jedes i die Konjugiertenklasse K_i von N_i^* bestimmen, die z enthält. Die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über ζ liegen, sind dann genau die Charaktere $\chi \in \text{Irr}(N_i^*)$, für die $\chi(1) = -\chi(z)$ gilt. Somit lassen sich die irreduziblen Charaktere von N_i^*, die über ζ liegen, an der zu K_i gehörigen Spalte der Charaktertafel von N_i^* ablesen.

Mithilfe des GAP-Befehls `PrimeBlocks` stellt man fest: 2.Suz hat genau drei 5-Blöcke, die über ζ liegen: Zwei Blöcke $B_1(\zeta)$ und $B_2(\zeta)$ mit Defekt 1 und einen Block $B_3(\zeta)$ mit

Defekt 2. N_2^* besitzt genau drei 5-Blöcke, die über ζ liegen. Da $B_1(\zeta)$ und $B_2(\zeta)$ zyklischen Defekt haben, muß nur $B_3(\zeta)$ betrachtet werden.

Anhand der berechneten Fusionen laßt sich gemäß Bemerkung 6.4.4 (c) nachrechnen, daß jeder Kettennormalisator N_i^* genau einen 5-Block besitzt, der über ζ liegt und $B_3(\zeta)$ induziert.

Wegen $\nu_5(|G|) = 2$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in (6.4) für d nur die Werte $d = 1$ und 2 von Interesse, da für $d > 2$ die Summanden in (6.4) trivialerweise verschwinden.

Die Bestimmung der Trägheitsfaktoren und das Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 liefern die folgenden Charakteranzahlen $k(C, B_3(\zeta), d, H)$ für den Block $B_3(\zeta)$ von G^*:

	$d = 1$	$d = 2$
$k(C_0, B_3(\zeta), d, \{1\})$	.	12
$-k(C_1, B_3(\zeta), d, \{1\})$	.	-8
$-k(C_2, B_3(\zeta), d, \{1\})$	.	-8
$-k(C_3, B_3(\zeta), d, \{1\})$	.	-12
$k(C_{2,3}, B_3(\zeta), d, \{1\})$	.	8
$k(C_{1,3}, B_3(\zeta), d, \{1\})$	.	8
$k(C_0, B_3(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	4
$-k(C_1, B_3(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	-6
$-k(C_2, B_3(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	-6
$-k(C_3, B_3(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	-4
$k(C_{2,3}, B_3(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	6
$k(C_{1,3}, B_3(\zeta), d, \mathbb{Z}_2)$	.	6

Da auch hier wieder sämtliche Spaltensummen verschwinden, gilt somit die projektiv-invariante Vermutung für 2.Suz und $p = 5$.

Gemäß Abschnitt 6.1 bleibt also nur noch die projektive Vermutung für $G^* = 3.\mathrm{Suz}$ und $G^* = 6.\mathrm{Suz}$ im Fall $p = 5$ zu verifizieren. Die Trägheitsfaktoren der Charaktere müssen somit nicht berücksichtigt werden.

Es sei zunächst $G^* = 3.\mathrm{Suz}$. Es sei $Z := Z(3.\mathrm{Suz})$. Es sei ferner η einer der beiden treuen linearen Charaktere von Z. Dann liegen genau drei 5-Blöcke von 3.Suz über η: Zwei Blöcke $B_1(\eta)$ und $B_2(\eta)$ mit Defekt 1 und ein Block $B_3(\eta)$ mit Defekt 2. Da $B_1(\eta)$ und $B_2(\eta)$ zyklischen Defekt haben, muß nur $B_3(\eta)$ betrachtet werden. Wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* der Kettennormalisatoren N_i in 3.Suz. Anschließend lassen sich wieder - wie in Abschnitt 6.4 beschrieben - die Charaktertafeln der

N_i^* berechnen. Mittels `PossibleClassFusions` bestimmt man die Fusionen der Klassen von N_i^* in 3.Suz.

Anhand der berechneten Fusionen läßt sich analog zum Fall $p = 3$ nachrechnen, daß jeder Kettennormalisator N_i^* genau einen 5-Block besitzt, der über η liegt und $B_3(\eta)$ induziert.

Wegen $\nu_5(|G|) = 2$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in (6.6) für d nur die Werte $d = 1$ und 2 von Interesse, da für $d > 2$ die Summanden in (6.6) trivialerweise verschwinden.

Durch Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 erhält man für den Block $B_3(\eta)$ somit:

	$d=1$	$d=2$
$k(C_0, B_3(\eta), d, \eta)$	.	16
$-k(C_1, B_3(\eta), d, \eta)$	.	-14
$-k(C_2, B_3(\eta), d, \eta)$	.	-14
$-k(C_3, B_3(\eta), d, \eta)$	.	-16
$k(C_{2,3}, B_3(\eta), d, \eta)$	.	14
$k(C_{1,3}, B_3(\eta), d, \eta)$	.	14

Da die Spaltensummen in dieser Tabelle Null ergeben, ist somit die Gültigkeit der projektiven Vermutung für 3.Suz und $p = 5$ nachgewiesen.

Es sei nun $G^* = 6.\text{Suz}$. Es sei $Z := Z(6.\text{Suz})$. Es sei ferner ξ einer der beiden treuen linearen Charaktere von Z. Dann liegen genau zwei 5-Blöcke von 6.Suz über ξ: Ein Block $B_1(\xi)$ mit Defekt 1 und ein Block $B_2(\xi)$ mit Defekt 2. Da $B_1(\xi)$ zyklischen Defekt hat, muß nur $B_2(\xi)$ betrachtet werden. Wie in Abschnitt 6.4 beschrieben, bestimmt man die Urbilder N_i^* der Kettennormalisatoren N_i in 6.Suz. Anschließend lassen sich wieder - wie in Abschnitt 6.4 beschrieben - die Charaktertafeln der N_i^* berechnen. Mittels `PossibleClassFusions` bestimmt man die Fusionen der Klassen von N_i^* in 6.Suz.

Anhand der berechneten Fusionen laßt sich analog zum Fall $p = 3$ nachrechnen, daß jeder Kettennormalisator N_i^* genau einen 5-Block besitzt, der über ξ liegt und $B_2(\xi)$ induziert.

Wegen $\nu_5(|G|) = 2$ sind zur Auswertung der alternierenden Summen in (6.6) für d nur die Werte $d = 1$ und 2 von Interesse, da für $d > 2$ die Summanden in (6.6) trivialerweise verschwinden.

Durch Abzählen der Charaktere gemäß Abschnitt 6.4 erhält man für den Block $B_2(\xi)$ somit:

	$d=1$	$d=2$
$k(C_0, B_2(\xi), d, \xi)$	.	16
$-k(C_1, B_2(\xi), d, \xi)$	.	-14
$-k(C_2, B_2(\xi), d, \xi)$	.	-14
$-k(C_3, B_2(\xi), d, \xi)$	.	-16
$k(C_{2,3}, B_2(\xi), d, \xi)$	.	14
$k(C_{1,3}, B_2(\xi), d, \xi)$	.	14

Da die Spaltensummen in dieser Tabelle verschwinden, ist somit die Gültigkeit der projektiven Vermutung auch für 6.Suz und $p = 5$ nachgewiesen.

Insgesamt ist hiermit die projektiv-invariante Vermutung für $G = \text{Suz}$ und $p = 5$ verifiziert. Damit ist der Beweis von Satz 6.0.5 abgeschlossen.

Anhang. GAP-Routinen

Das Programm `ElemChains`

Das Programm `ElemChains` ist eine GAP-Routine, die in Kapitel 6 benutzt wird, um ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen der elementaren p-Ketten von $G = \mathrm{Suz}$ mitsamt der zugehörigen Kettennormalisatoren in G und $\mathrm{Aut}(G)$ zu bestimmen (für $p = 2, 3, 5$) und das Kürzen der Ketten gemäß Kapitel 6, Abschnitt 2 vorzunehmen. `ElemChains` werden als Parameter eine Gruppe G, ihre Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ und eine Primzahl p übergeben. `ElemChains` gibt dann eine Liste von Quadrupeln `[ P, NGC, NAC, n ]` zurück, bei denen `P` eine Liste von Erzeugern der kleinsten nichttrivialen Untergruppe einer elementaren p-Kette C der Länge n des Vertretersystems ist. `NGC` ist eine Liste von Erzeugern des Kettennormalisators von C in G, `NAC` ist eine Liste von Erzeugern des Kettennormalisators von C in $\mathrm{Aut}(G)$. Die Ketten C bilden hierbei ein Vertretersystem der nichttrivialen elementaren p-Ketten von G.

Das Kernstück der Routine `ElemChains` sind die Unterfunktionen `ElemAbSubgroups` und `LenChains`, die auf Algorithmus 6.2.1 bzw. Algorithmus 6.2.2 basieren. Eine detaillierte Beschreibung dieser Algorithmen und der benutzten Variablen kann daher Kapitel 6, Algorithmus 6.2.1 bzw. 6.2.2 entnommen werden.

```
########################################################################
#
#   ElemAbSubgroups( <G>, <p> )
#
#   <G> = Gruppe
#   <p> = Primzahl
#
#   'ElemAbSubgroups' bestimmt ein Vertretersystem der <G>-Konjugierten-
#   klassen der elementar-abelschen <p>-Untergruppen von <G>. Der zurueck-
#   gegebene Wert ist eine Liste von Erzeugern der Untergruppen eines
#   Vertretersystems der <G>-Konjugiertenklassen von elementar-abelschen
```

```
#   <p>-Untergruppen

ElemAbSubgroups := function( G, p )

  local eps;

# Die Unterfunktion 'eps' basiert auf Algorithmus 6.2.1. Eine
# detaillierte Beschreibung des Algorithmus' und der benutzten
# Variablen kann daher Kapitel 6, Algorithmus 6.2.1 entnommen werden.

  eps := function(G, p, U)

    local V,                  # die in Alg. 6.2.1 beschriebenen Variablen
          VP,                 #           "
          P,                  #           "
          H, Repr, cen, x, y; # Hilfsvariablen

# Schritt 1 aus Algorithmus 6.2.1:
    if U = [ ] then return [ ]; fi;

    Repr  := U;

# Schritt 2 aus Algorithmus 6.2.1:
    V     := [ ];

# Schritt 3 aus Algorithmus 6.2.1:
    for x in U do
      P   := Group( x );
      cen := Centralizer( G, P );
      VP  := List( ConjugacyClasses( cen ), Representative );
      VP  := Filtered( VP, y -> ( Order( y ) = p and not ( y in P ) ) );
      for y in VP do
        H := ClosureGroup( P, y );

# Hier ist eine leichte Abweichung von Algorithmus 6.2.1:
# Um so wenig Konjugiertheitstests wie noetig durchzufuehren, wird
# zunaechst die Ordnung der Zentralisatoren der elem.-abelschen
# Untergruppen verglichen:
        if not ForAny(V, v -> ( Size( Centralizer( G, H ) )
                                  =Size( Centralizer( G, Group( v ) ) )
                              and IsConjugate( G, H, Group( v ) ) ) ) then
```

```
          Add(V, Concatenation( x, [ y ] ) );

        fi;
      od;
    od;

# Schritt 4 aus Algorithmus 6.2.1:
    return Concatenation( Repr, eps( G, p, V ) );
  end;


# Rufe Algor. 6.2.1 mit Startwert U={{1}} gemaess Bemerkung 6.2.1 auf:
  return eps( G, p, [[ One( G ) ]] );

end;




#########################################################################
#
#   LenChains( <TEn>, <p> )
#
#   <p>   = Primzahl
#   <TEn> = Liste von Quadrupeln [ P, NGC, NAC, n ] wie sie im
#           im Hauptprogramm ElemChains beschrieben sind (s.u.).
#           Hierbei bilden die Ketten C ein Vertretersystem der Kon-
#           jugiertenklassen der elementaren <p>-Ketten der Laenge n.
#
#   'LenChains' berechnet aus dem in <TEn> gegebenen Vertretersystem der
#   elementaren <p>-Ketten der Laenge n ein Vertretersystem der
#   elementaren <p>-ketten der Laenge n+1. Der zurueckgegebene Wert ist
#   eine Liste von Quadrupeln [ P, NGC, NAC, n + 1 ] wie oben be-
#   beschrieben. 'LenChains' basiert auf Algorithmus 6.2.2. Eine
#   detaillierte Beschreibung des Algorithmus und der benutzten
#   Variablen kann daher Kapitel 6, Algorithmus 6.2.2 entnommen werden.

LenChains := function( TEn, p )

  local V, P, Q, UP, UPO, Repr, i, e, x, y;
```

```
# Initialisiere Hilfsvariablen:

  if TEn = [ ] then return [ ]; fi;
  Repr := TEn;

# Schritt 1 aus Algorithmus 6.2.2:
  V    := [ ];

  for i in [ 1 .. Length(TEn) ] do

# Schritt 3 aus Algorithmus 6.2.2:
    P  := Group( TEn[ i ][ 1 ] );
    IsElementaryAbelian( P );
    UP := List( ConjugacyClassesSubgroups( P ), Representative );
    for e in [ 1 .. PrimePowersInt( Size( P ) )[ 2 ] - 1 ] do
      UPO := Filtered( UP, x -> Size( x ) = p^e );
      UPO := List( Orbits( Group(TEn[ i ][ 2 ]), UPO ), Representative );
      for Q in UPO do

# Schritt 4 aus Algorithmus 6.2.2:
        Add( V, [ SmallGeneratingSet( Q ),
         SmallGeneratingSet( Normalizer( Group( TEn[ i ][ 2 ] ), Q ) ),
         SmallGeneratingSet( Normalizer( Group( TEn[ i ][ 3 ] ), Q ) ),
         TEn[ i ][ 4 ] + 1 ] );
      od;
    od;
  od;

# Schritt 5 aus Algorithmus 6.2.2:
  return Concatenation( Repr, LenChains( V, p ) );

end;



#########################################################################
#
#   CancelChains( <G>, <EG> )
#
#   <G>  = Gruppe
```

```
#   <EG> = Liste von Quadrupeln [ P, NGC, NAC, n ] wie in LenChains,
#          so dass die zugehoerigen Ketten ein Vertretersystem der
#          Konjugiertenklassen der elementaren <p>-Ketten von <G> bilden.
#
#   'CancelChains' fuehrt das Kuerzen der Ketten durch wie in Kapitel 6,
#   Abschnitt 2 beschrieben. Der zurueckgegebene Wert ist wieder eine
#   Liste von Quadrupeln der oben beschriebenen Form.

CancelChains := function( G, EG )

  local Ni, i, j, done;

  for i in [ 1 .. Length( EG ) - 1 ] do
    if IsBound( EG[ i ] ) then
      Ni := Group( EG[ i ][ 3 ] );
      j  := i + 1; done := false;
      while j <= Length ( EG ) and not done do
        if ( IsBound( EG[ j ] ) and
             AbsInt( EG[ j ][ 4 ] - EG[ i ][ 4 ] ) = 1 and
             Size( Ni ) = Size( Group( EG[ j ][ 3 ] ) ) and
             IsConjugate( G, Ni, Group( EG[ j ][ 3 ] ) ) ) then
          Unbind( EG[ i ] ); Unbind( EG[ j ] );
          done := true;
        fi;
        j := j + 1;
      od;
    fi;
  od;

  return Compacted( EG );

end;


#######################################################################
#
#   Hier beginnt das Hauptprogramm:
```

```
#
#   ElemChains( <G>, <A>, <p> )
#
#   <G> = Gruppe
#   <A> = Aut( G )
#   <p> = Primzahl
#
#   'ElemChains' bestimmt ein Vertretersystem der <G>-Konjugierten-
#   klassen der nichttrivialen elementaren <p>-Ketten von <G> und kuerzt
#   die Ketten aus diesem Vertretersystem gemaess Kapitel 6, Ab-
#   schnitt 2. Der zurueckgegebene Wert ist eine Liste von Quadrupeln
#   [ P, NGC, NAC, n ] , bei denen P eine Liste von Erzeugern der
#   kleinsten nichttrivialen Untergruppe einer elementaren <p>-Kette C
#   der Laenge n des Vertretersystems ist. NGC ist eine Liste der
#   Erzeuger des Kettennormalisators von C in <G>, NAC ist eine Liste
#   von Erzeugern des Kettennormalisators von C in Aut( G ).


ElemChains := function( G, A, p )

  local EG;

# Bestimme ein Vertr.-System der Konjugiertenklassen der
# elem.-abelschen p- Untergruppen von G:
  EG := ElemAbSubgroups( G, p );

# Es werden nur die nichttrivialen Ketten gesucht:
  Unbind( EG[ 1 ] ); EG := Compacted( EG );

# Berechne die Kettennormalisatoren in G und Aut(G) der oben
# bestimmten Ketten der Laenge 1:
  EG := List( EG, x -> [ x,
                SmallGeneratingSet( Normalizer( G, Group( x ) ) ),
                SmallGeneratingSet( Normalizer( A, Group( x ) ) ),
                1 ] );

# Rufe Algorithmus 6.2.2 mit Startwert G, p und EG gemaess Bemerkung 3.3
# auf. (G wird nicht explizit uebergeben, da Algor. 6.2.2 nicht explizit
# von G abhaengt, wenn alle Kettennormalisatoren bekannt sind.):
  EG := LenChains( EG, p );
```

```
# Kuerzen der Ketten:
  return CancelChains( G, EG );

end;
```

Wählt man für `G` und `A` die in Kapitel 6, Abschnitt 2 beschriebenen Permutationsdarstellungen von Suz und Suz:2, und wählt man `p` $\in \{2, 3, 5\}$, so liefert `ElemChains` die in den Abschnitten 6.5 bis 6.7 zugrundegelegten elementaren Ketten und Normalisatoren.

Literaturverzeichnis

[Alp75] Alperin, J. L. The main problem of block theory. In *Proceedings of the Conference on Finite Groups*, pages 341–356. Univ. Utah, Park City, UT, Academic Press, New York, 1975.

[Alp87] Alperin, J. L. Weights for Finite Groups. In *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups, Proc. Sympos. Pure Math*, volume 47, pages 369–379. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Bra63] Brauer, R. Representations of Finite Groups. In *Lectures on Modern Mathematics*, volume 1, pages 133–175. John Wiley & Sons, Inc, 1963.

[Bre99] Breuer, T. Computing Possible Class Fusions from Character Tables. *Communications in Algebra*, 27(6):2733–2748, 1999.

[CCN+85] Conway, John H., Curtis, Robert T., Norton, Simon P., Parker, Richard A., and Wilson, Robert A. *Atlas of finite groups.* Oxford University Press, 1985.

[Dad92] Dade, E. C. Counting characters in blocks I. *Invent. Math.*, 109:187–210, 1992.

[Dad94] Dade, E. C. Counting characters in blocks II. *J. reine angew. Math.*, 448:97–190, 1994.

[Dad96] Dade, E. C. Counting characters in blocks with cyclic defect group I. *J. Algebra*, 186:934–969, 1996.

[Dad97] Dade, E. C. Counting Characters in Blocks 2.9. In R. Solomon, editor, *Representation Theory of Finite Groups*, pages 45–59, 1997.

[Dad99] Dade, E. C. Another way to count characters. *J. reine angew. Math.*, 510:1–55, 1999.

[Dor71] Dornhoff, L. *Group Representation Theory, Part A.* Marcel Dekker Inc., New York, 1971.

[Ent97] Entz, G. Dades Vermutung für gewöhnliche und projektive Charaktere, 1997.

[EP97] Entz, G. and Pahlings, H. The Dade Conjecture for the McLaughlin group. In C. M. Campbell, editor, *Groups St. Andrews 1997 in Bath. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 260*, 1997.

[Fei82] Feit, W. *The Representation Theory of Finite Groups.* North-Holland, 1982.

[GAP98] The GAP Group, Aachen, St Andrews. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4*, 1998. (`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap`).

[Gre68] Green, J. Some remarks on defect groups. *Math. Z.*, 107:133–155, 1968.

[HH97] Hassan, N. and Horváth, E. Dade's Conjecture for the Simple Higman-Sims Group. In C. M. Campbell, editor, *Groups St. Andrews 1997 in Bath. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 260*, 1997.

[Hul93] Hulpke, A. Zur Berechnung von Charaktertafeln, 1993.

[Isa76] Isaacs, M. *Character Theory of Finite Groups.* Academic Press, New York, 1976.

[KR89] Knörr, R. and Robinson, G. Some Remarks on a Conjecture of Alperin. *J. London Math. Soc. (2)*, 39:48–60, 1989.

[Rin94] Ringe, M. The C–MeatAxe (Software Manual), 1994.

[WWT+] Wilson, R.A., Walsh, P., Tripp, J., Suleiman, I., Rogers, S., Parker, R.A., Norton, S., Linton, S., and Bray, J. Atlas of finite group representations. WWW unter `http://for.mat.bham.ac.uk/atlas/`.

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.