Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 21.4.2015

Übungen Algebra II
Blatt 1

1. *Nilpotente Elemente und Einheiten.* Sei R ein Ring und $N \subseteq R$ sein Nilradikal.

(1) Sei $r \in R$ nilpotent. Zeigen Sie, daß $1 + r$ eine Einheit in R ist.
(2) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind:
  (a) R hat genau ein Primideal.
  (b) Jedes Element aus R ist eine Einheit oder nilpotent.
  (c) Der Quotientenring R/N ist ein Körper.

2. *Ideale von Quotientenringen.* Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und $q : R \to R/I$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie, daß die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \{K \mid K \subseteq R/I \text{ ist ein Ideal }\} & \to & \{J \mid J \subseteq R \text{ ist ein Ideal mit } I \subseteq J\} \\ K & \mapsto & q^{-1}(K) \end{array}$$

wohldefiniert und eine Bijektion von Mengen ist.

3. *Polynomringe.* Sei R ein Ring, und $R[x]$ der Polynomring in einer Veränderlichen. Sei $f = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ mit $c_i \in R$ ein beliebiges Element aus $R[x]$.

(1) Zeigen Sie, daß f genau dann eine Einheit in $R[x]$ ist, wenn c_0 eine Einheit in R ist und alle c_i mit $i \geq 1$ nilpotent in R sind.
(2) Zeigen Sie, daß f genau dann nilpotent ist, wenn alle c_i nilpotent in R sind.
(3) etwas kniffliger: Zeigen Sie, daß f genau dann ein Nullteiler in $R[x]$ ist, wenn es ein $r \in R$ mit $rf = 0$ gibt.

4. *Beispiele von Ringen aus der Analysis.* Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei R die Menge aller stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, daß R ein Ring ist (bzgl. punktweiser Addition und Multiplikation von Funktionen).
(2) Zeigen Sie, daß für jedes $x \in I$ die Menge
$$M_x := \{f \in R \mid f(x) = 0\} \subseteq R$$
ein maximales Ideal von R ist.
(3) Ist umgekehrt jedes maximale Ideal von R von der Gestalt M_x für ein passendes $x \in I$?
(4) Sei $R' \subseteq R$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. (Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger, wenn die Menge $\{x \in I | f(x) \neq 0\}$ in einem kompakten Intervall enthalten ist.) Ist R' ein Unterring von R?