Prof. Dr. Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 30.4.2015

Übungen Algebra II
Blatt 2

1. *Radikale Ideale und Idealquotienten.* Sei R ein Ring und I, J, K Ideale. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.
(2) $(I : (J + K)) = (I : J) \cap (I : K)$.
(3) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
(4) Wenn P ein Primideal ist, so gilt $\sqrt{P^n} = P$ für alle $n \geq 1$.

2. *Minimale Primideale.* Sei R ein Ring und I ein Ideal mit $I \neq R$. Zeigen Sie, daß die Menge der Primideale von R, die I enthalten, ein minimales Element bzgl. Inklusion hat. Folgern Sie, daß die Menge der Primideale von R ein minimales Element bzgl. Inklusion hat. (*Tip:* Imitieren Sie den Beweis aus der Vorlesung, der Existenz maximaler Ideale zeigt.)

3. *Stetigkeit.*

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie. Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:
 (a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (das von x, ε abhängt), so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt.
 (b) Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U)$ offen.
(2) Seien R und S Ringe und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, daß für $P \in \operatorname{Spec} S$ stets $f^{-1}(P) \in \operatorname{Spec} R$ gilt. Zeigen Sie, daß die so erhaltene Abbildung $\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ stetig bezüglich der Zariski-Topologien ist.

4. *Topologie von Spektren.* Sei R ein Integritätsbereich und $\operatorname{Spec} R$ sein Spektrum.

(1) Seien $x \neq y$ zwei Punkte von $\mathbb{R}$. Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie. Zeigen Sie, daß es offene Umgebungen $x \in U_x \subseteq \mathbb{R}$ und $y \in U_y \subseteq \mathbb{R}$ mit $U_x \cap U_y = \emptyset$ gibt.
(2) Seien $x \neq y$ zwei Punkte von $\operatorname{Spec} R$. Seien $x \in U_x \subseteq \operatorname{Spec} R$ und $y \in U_y \subseteq \operatorname{Spec} R$ zwei beliebige offene Umgebungen. Zeigen Sie, daß dann stets $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ gilt.
(3) Seien $x \neq y$ zwei Punkte von $\operatorname{Spec} R$. Gibt es dann wenigstens eine offene Umgebung $x \in U_x \subseteq \operatorname{Spec} R$, so daß $y \notin U_y$ gilt?

Erläuterung: Topologische Räume, in denen (3) gilt, erfüllen das Trennungsaxiom T_1. Topologische Räume, in denen (1) gilt, erfüllen das Trennungsaxion T_2 (solche Räume nennt man auch Hausdorffsch).