Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 12/13.5.2015[1]

# Übungen Algebra II
# Blatt 4

**1.** *Jacobson Ringe.* Beweise folgende Aussagen:

(1) ein Ring ist Jacobson genau dann wenn jedes Primideal gleich dem Schnitt der ihn enthaltenden maximalen Ideale ist.
(2) $\mathbb{Z}$ ist Jacobson.
(3) Wenn $k$ ein Körper ist, dann ist $k[[x]]$ nicht Jacobson.

**2.** *Ein Beispiel.* Sei $k$ ein Körper. Betrachte die $k$-Algebra $R = k[x, y]/(x^2 - y^3)$. Beschreibe $\operatorname{Spec} R$ (Tipp: versuche $R$ anders zu beschreiben und dabei die Anzahl der notwendigen Koordinaten ($x$,$y$) so weit wie möglich zu reduzieren). Zeige: es gibt keinen Isomorphismus von $k$-Algebren $R \cong k[t]$. Finde eine natürliche Abbildung zwischen $\operatorname{Spec} R$ und $\operatorname{Spec} k[t]$.

**3.** *Rationale Punkte auf algebraischen Mengen.* Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, wobei $k$ ein Körper ist (nicht unbedingt algebraisch abgeschlossen). Sei $k[X]$ der Koordinatenring von $X$. Konstruiere eine Bijektion zwischen $X$ und der Menge

$$\operatorname{Hom}_{k-Alg}(k[X], k) := \{\varphi : k[X] \to k \mid \varphi \text{ ist ein } k\text{-Algebren Homomorphismus}\} .$$

**4.** *Grundlegende Eigenschaften von Moduln.* Sei $R$ ein Ring und seien $M, M', N, N'$ $R$-Moduln. (Alle Homomorphismen in dieser Aufgabe sind Homomorphismen von $R$-Moduln). Zeige folgende Aussagen:

(1) es gibt einen kanonischen Isomorphismus $M \cong \operatorname{Hom}_R(R, M)$.
(2) jeder Homomorphismus $f : M' \to M$ induziert einen Homomorphismus
$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M', N),$$
und jeder Homomorphismus $g : N \to N'$ induziert einen Homomorphismus
$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M, N') .$$
(3) es existiert ein Isomorphismus $R^m \cong R^n$ genau dann wenn $m = n$. (Tipp: wähle ein maximales Ideal von $R$ und benutze Nakayama's Lemma um auf den Fall von Vektorräumen über einem Körper zu reduzieren.) Bemerkung: es existieren *nicht-kommutative* Ringe $R$ mit der Eigenschaft $R^m \cong R^n$ für alle $m, n \geq 1$!

[1]da der reguläre Abgabetermin (14.5) ein Feiertag ist, soll die Abgabe entweder in der Vorlesung am 12.5 oder bei Alexander Ivanov im Büro am 13.5 (02.10.037) stattfinden.