Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 21.5.2015

Übungen Algebra II
Blatt 5

1. *Exaktheitseigenschaften des* Hom*-Functors.* Betrachte R-Moduln M, M' und M''.

(1) Zeige, dass die Sequenz

$$M' \to M \to M'' \to 0$$

genau dann exakt ist, wenn für jeden R-Modul N die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M'', N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

exakt ist.

(2) Finde ein Beispiel für einen Ring R und R-Moduln M', M, N, so dass M' ein Untermodul von M ist (insbesondere, $0 \to M' \to M$ ist exakt), aber so dass die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N)$ nicht surjektiv ist (d.h., $\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N) \to 0$ ist nicht exakt).

2. *Tensorprodukte von $\mathbb{Z}$-Moduln und Vektorräumen.* Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.

(1) Zeige dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ falls m und n teilerfremd sind.

(2) Bestimme $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ im Allgemeinen.

(3) Sei k ein Körper und V, W k-Vektorräume. Zeige, dass

$$\dim_k(V \otimes_k W) = \dim_k(V) \cdot \dim_k(W).$$

3. *Tensorprodukte, Ideale und Moduln.* Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Zeige dass der R-Modul $(R/I) \otimes_R M$ isomorph zu M/IM ist. (Tipp: Tensoriere die kurze exakte Sequenz $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ mit M.)

4. *Tensorprodukt über lokalen Ringen.* Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M, N endlich erzeugte R-Moduln. Zeige, dass

$$M \otimes_R N = 0 \qquad \text{genau dann wenn} \qquad M = 0 \text{ oder } N = 0.$$

(Tipp: eine Richtung ist trivial. Für die andere Richtung benutze (wie so häufig bei lokalen Ringen) das Nakayama-Lemma.)