Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 25.6.2015

Übungen Algebra II
Blatt 10

1. *Ganzer Abschluss. Beispiel 1.*
Bestimme den ganzen Abschluss von $R = k[x,y]/(x^2 - y^3)$ in seinem Quotientenkörper.

2.* *Ganzer Abschluss. Beispiel 2.*
Sei $d \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, die durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist. Bestimme den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ (bzw. von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - d)$, was auf dasselbe hinausläuft) in $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. (Tipp: man sollte zwischen den Fällen $d \equiv 1 \bmod 4$ und $d \equiv 2, 3 \bmod 4$. Im ersteren Fall ist z.B. $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$, im letzteren Fall ist $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ schon der ganze Abschluss).

3. *Faktorielle Ringe (Engl.: unique factorization domain, UFD).*
Ein Integritätsbereich heisst *faktoriell*, wenn jedes Element von $R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ eine eindeutige Zerlegung in ein Produkt von irreduziblen Elementen hat. Zeige, dass ein faktorieller Ring normal ist.

4. *Eigenschaften von ganzen Erweiterungen.*
Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Ringen und sei J_R (bzw. J_S) das Jacobson-Radikal von R (bzw. S). Zeige:

(1) $R \cap S^\times = R^\times$
(2) $J_S \cap R = J_R$.