Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 2.7.2015

Übungen Algebra II
Blatt 11

1. *Ganze Morphismen und Tensorprodukte.*
Sei $f\colon S \to S'$ ein Homomorphismus von R-Algebren und sei T eine R-Algebra. Angenommen, f ist ganz. Zeige, dass

$$f \otimes \mathrm{id}_T\colon S \otimes_R T \;\to\; S' \otimes_R T$$

auch ganz ist.

2. *Bewertungsringe.*
Sei R ein Bewertungsring und K sein Quotientenkörper. Dann ist $R^\times \subseteq K^\times$ eine Untergruppe. Betrachte den Homomorphismus

$$v\colon K^\times \;\to\; \Gamma \;:=\; K^\times/R^\times.$$

(1) Sei $\xi, \eta \in \Gamma$. Wähle Repräsentanten $x, y \in K^\times$ von ξ, η. Definiere

$$\xi \geq \eta \quad \text{genau dann wenn} \quad xy^{-1} \in R.$$

Zeige, dass $\geq$ wohldefiniert ist und eine totale Ordnung auf Γ definiert.

(2) Zeige, dass $\geq$ kompatibel mit der Gruppenstruktur von Γ ist, d.h.

$$\xi \geq \eta \quad \Rightarrow \quad \xi\omega \geq \eta\omega \ \text{ für alle } \omega \in \Gamma.$$

(Bemerkung: $(\Gamma, \geq)$ heißt *total geordnete Gruppe*.)

(3) Setze $v(0) := \infty$, so dass $\gamma < \infty$ für jedes $\gamma \in \Gamma$. Zeige

$$v(x+y) \;\geq\; \min\{v(x), v(y)\} \ \text{ für alle } x, y \in K.$$

Bemerkung: ein Homomorphismus v von $K^\times$ in eine total geordnete Gruppe, welcher die obige Ungleichung erfüllt, heißt *Bewertung* (Engl.: *valuation*) von K.

(4) Kann man R, $R^\times$ und das maximale Ideal von R aus der Bewertung $v\colon K^\times \to \Gamma$ bestimmen?

(5*) Versuche rauszufinden (recherchieren erlaubt!), was die Ungleichung bei (3) mit der Dreiecksungleichung zu tun hat.

3. *Ganzheitsringe in Zahlkörpern*
Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung, sei $\mathcal{O}_K$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in K. Angenommen, $\mathcal{O}_K$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul. Zeige, dass $\mathcal{O}_K$ ein Dedekindring ist. (Tipp: zeige erst, dass $\mathcal{O}_K$ noethersch ist. Zeige dann, dass jedes Primideal maximal ist.)

Bemerkung: die technische Annahme, dass $\mathcal{O}_K$ endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist, ist immer erfüllt (vgl. zum Beispiel J. Neukirch "Algebraische Zahlentheorie", Kapitel 1, §2). Mit anderen Worten, $\mathbb{Z}$ ist ein Japanischer Ring. Ein Integritätsbereich A heißt *Japanischer Ring*, falls für jede endliche Erweiterung L des Quotientenkörpers von A, der ganze Abschluss von A in L endlich erzeugt als A-Modul ist.

4. *Going-up*
Sei $f\colon R \to S$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Zeige: der induzierte Morphismus von topologischen Räumen

$$\phi\colon \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$$

ist *abgeschlossen*, d.h. ϕ bildet abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene ab.