Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 6.7.2015

# Übungen Algebra II
# Blatt 12

**1.** *Topologische Gruppen.* Sei $G$ eine abelsche topologische Gruppe.

(1) Sei $H$ der Schnitt aller offenen Umgebungen von $0 \in G$. Zeige, dass $H$ eine Untergruppe von $G$ ist.

(2) Sei $K \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass der Abschluss $\overline{K}$ von $K$ in $G$ wieder eine Untergruppe von $G$ ist.

**2.** *$p$-adische Topologie.* Sei $p$ eine Primzahl. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$, definiere Untermengen von $\mathbb{Z}$ ("offene Umgebungen von $x$") durch

$$U_n(x) := x + p^n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$$

Diese Mengen erzeugen eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{Z}$.

(1) Zeige, dass $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe ist, d.h., die Addition und die Abbildung $x \mapsto -x$ sind stetig bezüglich $\mathcal{T}$.

(2) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Z}$. Zeige: $(a_k)$ ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn für jedes $N$ ein $n_0$ existiert, so dass für alle $k, k' \geq n_0$ gilt: $a_k - a_{k'}$ is durch $p^N$ teilbar.

(3) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Z}$. Definiere

$$a_k := \sum_{i=1}^{k} c_k \quad \text{und} \quad a'_k := \sum_{i=1}^{k} c_k p^k.$$

Wann ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge? Wann ist $(a'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge?