Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 7.5.2015

Übungen Algebra II
Blatt 3

1. *Irreduzible topologische Räume.* Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ heißt *irreduzibel*, wenn $X \neq \emptyset$ und je zwei nichtleere offene Mengen einen nichtleeren Schnitt haben.

(1) Ist $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie irreduzibel? Ist ein diskreter topologischer Raum irreduzibel? Ist ein chaotischer topologischer Raum irreduzibel?
(2) Sei R ein Ring. Zeigen Sie, daß $\operatorname{Spec} R$ genau dann irreduzibel ist, wenn das Nilradikal von R ein Primideal ist.

2. *Reelle algebraische Mengen.* Skizzieren sie die algebraischen Mengen $\mathcal{V}(f_i) \subseteq \mathbb{R}^2$ für die folgenden Polynome $f_i \in \mathbb{R}[x, y]$:

(1) $f_1 := 2x - y$.
(2) $f_2 := x^2 + y^2 - 1$.
(3) $f_3 := x^2 + y^2 + 1$.

Finden Sie maximale Ideale $P \subset \mathbb{R}[x, y]$ und $M \subset \mathbb{C}[x, y]$ mit $f_3 \in P$ und $f_3 \in M$.

3. *Gegenbeispiele.* Sei k ein Körper.

(1) In der Vorlesung hatten wir gesehen, daß ein Integritätsbereich A, der algebraisch über k ist, ein Körper ist. Zeigen Sie an Hand von Beispielen, daß diese Aussage falsch wird, wenn A kein Integritätsbereich ist, oder A zwar Integritätsbereich, aber nicht algebraisch über k ist.
(2) Seien $K \subseteq R$ zwei k-Algebren. In der Vorlesung hatten wir folgendes gesehen: falls R eine endlich erzeugte k-Algebra ist, so ist K algebraisch über k. Zeigen Sie an Hand von Beispielen, daß diese Aussage falsch wird, wenn R keine endlich erzeugte k-Algebra ist.

4. *Weitere Beispiele.* Geben Sie jeweils ein Beispiel für einen Ring R so dass

(1) R Integritätsbereich, $R \neq \operatorname{Quot}(R)$ und $\operatorname{Quot}(R)$ eine endlich erzeugte R-algebra ist (d.h., es gibt einen surjektiven Homomorphismus $R[T_1, \dots, T_n] \twoheadrightarrow \operatorname{Quot}(R)$).
(2) R Integritätsbereich und $\operatorname{Quot}(R)$ keine endlich erzeugte R-Algebra ist.
(3) $\operatorname{Spec}(R)$ nicht zusammenhängend bezüglich der Zariski-Topologie ist (d.h. es gibt disjunkte nichtleere Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ beide offen und abgeschlossen, so dass $\operatorname{Spec}(R) = U_1 \cup U_2$).
(4) $\operatorname{Spec}(R)$ zusammenhängend aber nicht irreduzibel bezüglich der Zariski-Topologie ist.