Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 28.5.2015

Übungen Algebra II
Blatt 6

1. *Flachheit und Extension von Skalaren.* Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und M ein flacher R-Modul. Zeige, dass $M_S := M \otimes_R S$ ein flacher S-Modul ist.

2. *Berechnung des* Tor*-Functors für* $\mathbb{Z}$*-Moduln.*

(1) Zeige, dass es für jedes $m \geq 1$ eine projektive Auflsung

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$$

des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt.

(2) Sei N ein $\mathbb{Z}$-Modul. Benutze (1) um fogendes zu zeigen:

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},\, N) \cong \begin{cases} N/mN & \text{für} \quad i = 0, \\ \{n \in N \,|\, mn = 0\} & \text{für} \quad i = 1, \\ 0 & \text{für} \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Bemerkung: dies zeigt, dass $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, N)$ die m-Torsion von N berechnet, worin sich die Bezeichnung "Tor" begründet.

3. *Diagrammjagd.* (Benutze die Notationen aus der Vorlesung.) Beweise, dass die im Schlangenlemma induzierte Sequenz der (Co-)Kerne exakt an der Stelle $\ker f''$ ist.

Bonus (für die Interessierten, die Ihre Diagrammjagd-Skills weiter perfektionieren möchten). Finde das Fünferlemma (z.B. auf Wikipedia) und beweise es.

4. *Duale Vektorräume und* $\otimes$. Sei k ein Körper und V, W endlich-dimensionale k-Vektorräume. Zeige, dass ein natürlicher Isomorphismus

$$V^\vee \otimes_k W \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,\, W),$$

von k-Vektorräumen existiert, der einen Tensor $\varphi \otimes w$ auf den Homomorphismus $v \mapsto \varphi(v) \cdot w$ abbildet. Hier bezeichnet $V^\vee$ den dualen Vektorraum $\mathrm{Hom}_k(V, k)$.