Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 4.6.2015

Übungen Algebra II
Blatt 7

1. *Lokalisierung von Moduln.*
Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M = 0$ genau dann gilt, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM = 0$.

2. *Primideale von Quotienten von Lokalisierungen.*
Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal im Ring R. Falls $q\colon R \to R/\mathfrak{p}$ der Quotientenmorphismus ist, dann hatten wir gesehen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} R/\mathfrak{p} & \to & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R,\ \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\} \\ \mathfrak{q} & \mapsto & q^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

bijektiv ist. Nun zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}} \to \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R,\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

auch eine Bijektion definiert. Sind die beiden betrachteten Untermengen von $\operatorname{Spec} R$ offen, abgeschlossen oder weder offen noch abgeschlossen bezüglich der Zariski-Topologie?

3. *Die kuspidale Kurve II (Fortsetzung von Aufgabe 2 auf Blatt 4).*
Sei $R = \operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2 - y^3)$ wie in der Aufgabe 2 auf Blatt 4. Wir hatten gesehen, dass es einen Isomorphismus $R \cong k[t^2, t^3]$ gibt und damit eine Einbettung $R \hookrightarrow k[t]$. Benutze die Technik der Lokalisierung, um eine vollständige Beschreibung von $\operatorname{Spec} R$ zu geben. (Tipp: lokalisiere alle involvierten Ringe am Primideal, welches dem Nullpunkt entspricht.)

4. *Weitere Lokalisierungen.*
Sei R ein Ring.
(1) Sei $S = R^*$, die Menge der Einheiten in R. Was ist $S^{-1}R$?
(2) Gibt es eine größte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S von R, so dass die natürliche Abbildung $R \to S^{-1}R$ injektiv ist? Falls ein solches S existiert: ist es eindeutig und wie kann man es charakterisieren?