Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 11.6.2015

Übungen Algebra II
Blatt 8

1. *Beispiele zur Lokalisierung.*
Bestimme die Lokalisierung von $R = k[x, y]/(xy)$ an der multiplikativen Teilmenge $S = \{x^i : i \geq 0\}$. Interpretiere die Abbildung $\mathrm{Spec}\,(S^{-1}R) \to \mathrm{Spec}\,(R)$ geometrisch. Bestimme die Lokalisierung von $k[t]/(t^2)$ am einzigen Primideal.

2. *Lokalisierung von Moduln.*
Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Angenommen, es existiert ein Ideal $I \subseteq R$, so dass für alle maximalen Ideale $I \subseteq \mathfrak{m}$ gilt: $M_\mathfrak{m} = 0$. Zeige, dass $IM = M$.

3. *Lokale Eigenschaften und Reduziertheit.*
Sei R ein Ring und $x \in R$ ein Element. Angenommen, R ist reduziert. Zeige: falls $x = 0$ in $R_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(R)$, dann $x = 0$ in R.

4. *Träger eines Moduls.*
Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Der Träger (engl.: *support*) von M ist die Teilmenge $\mathrm{Supp}(M)$ aller $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,(R)$ für die $M_\mathfrak{p} \neq 0$ gilt. Zeige:

(1) $M \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Supp}(M) \neq \emptyset$.
(2) Falls M endlich erzeugt, dann $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$. Insbesondere, falls $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, dann $\mathrm{Supp}(R/\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$.
(3) Falls M endlich erzeugt, dann ist $\mathrm{Supp}(M)$ Zariski-abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(R)$.