Prof. Dr. Christian Liedtke
Dr. Alexander Ivanov

Sommersemester 2015
Abgabe: 18.6.2015

Übungen Algebra II
Blatt 9

1. *Noethersche Ringe.*
Sei R ein Ring. Angenommen, $R[x]$ ist Noethersch. Ist R dann auch noethersch?

2. *Homomorphismen zwischen artinschen und noetherschen Moduln.*
Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

(1) Angenommen, M ist noethersch (als R-Modul) und $f\colon M \to M$ ist ein surjektiver Homomorphismus von R-Moduln. Zeige, dass f ein Isomorphismus ist (Tipp: betrachte die Untermoduln $\ker(f^m)$).
(2) Angenommen, M ist artinsch (als R-Modul) und $f\colon M \to M$ ist ein injektiver Homomorphismus von R-Moduln. Zeige, dass f ein Isomorphismus ist.

3. *Noethersche Moduln.*
Sei R ein Ring und sei M ein noetherscher R-Modul. Sei $I := \mathrm{Ann}(M)$ der Annihilator von M. Zeige, dass R/I ein noetherscher Ring ist. Stimmt diese Aussage immer noch, wenn man "noethersch" durch "artinsch" ersetzt?

4. *Noethersche topologische Räume.*
Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn seine offene Teilmengen die aufsteigende Kettenbedingung erfüllen.

(1) Zeige dass jeder Unterraum eines noetherschen Raumes wieder noethersch ist.
(2) Zeige, dass ein noetherscher Raum quasi-kompakt ist (jede Überdeckung durch offene Teilmengen hat eine endliche Teilüberdeckung).
(3) Sei R ein *beliebiger* Ring. Zeige, dass $\mathrm{Spec}\, R$ quasi-kompakt ist.
(4) Zeige: falls R noethersch ist, dann ist $\mathrm{Spec}\, R$ auch noethersch.