Prof. Dr. Liedtke
Dr. Ivanov

Wintersemester 2013/14

Seminar *Klassische algebraische Geometrie*

Dieses Seminar begleitet meine Vorlesung “Algebraische Geometrie”. Ziel dieses Seminars ist es, möglichst viele Beispiele und Konstruktionen aus der algebraischen Geometrie kennenzulernen, und diese im Detail zu verstehen. In Verbindung mit der Vorlesung “Algebraische Geometrie” legt das Seminar die Grundlage für ein vertieftes Studium der algebraischen Geometrie, und ist die Voraussetzung, für das Schreiben einer Bachelor- und (später) einer Masterarbeit bei mir.

Zur erfolgreichen Teilnahme am Seminar gehören:

(1) Regelmässige Teilnahme.
(2) Halten eines Vortrags.
(3) Handout zum Vortrag.

Im Anschluß an das Seminar können Bachelor-Arbeiten vergeben werden.

Vorträge im Detail

(1) *Projektiver Raum, Graßmannvarietäten.* (Dominik Kohn)
Konstruktion des projektiven Raums, homogene Koordinaten, affine Karten [SKKT, Kapitel 3.1 - 3.2]. Graßmannsche Varietät und die Plücker-Einbettung [SKKT, Kapitel 5.4]. Zusätzlich kann ein Blick in [H1, Lecture 1], [H1, Lecture 6] und [ST, Chapter I.1] nicht schaden.

(2) *Ebene Quadriken.* (Alexander Ivanov)
Parametrisierung von Kurven, Lösung der Gleichung $z^2 = x^2 + y^2$, der Raum aller ebenen Quadriken, 5 Punkte in allgemeiner Lage bestimmen eine ebene Quadrik [R, Chapter I.1]. Bei diesem Vortrag ist es wichtig, das angegebene Material gut auszuwählen, und eventuell um Bilder (z.B. aus [H1, Example 3.3]) zu ergänzen.

(3) *Ebene Kubiken* (Ursula Schandl)
Nodale und kuspidale Kubiken und ihre Parametrisierung, die Kubiken der Legendre-Familie und ihre nicht-Parametrisierbarkeit, Linearsysteme von Kubiken mit 8 vorgegebenen Basispunkten in allgemeiner Lage [R, §2] bis einschließlich [R, §2 (2.7)].

(4) *Elliptische Kurven.* (Alexander Trost)
Das Gruppengesetz (geometrisch) auf einer ebenen Kubik, v.a. Assoziativität im Detail erklären [R, §2 ab (2.8)]. Weierstraß-Gleichung einer elliptischen Kurve, den Satz von Mordell erwähnen, und das Gruppengesetz (mit Gleichungen) [ST, Chapter I.2], [ST, Chapter I.4]. Wenn noch Zeit übrig ist, etwas zu Punkten der Ordnung 2 und 3 sagen [ST, Chapter II.1].

(5) *Elliptische Kurven und Kryptographie* (Aaron Montag)

(6) *Rationale Normkurven, Veronese- und Segre- Abbildungen.* (Long Huyn Huu) Die rationalen Normkurven, ihre determinantalen Ideale und Parametrisierung [H1, Example 1.14], [H1, Example 1.16] und [H1, Example 1.17]. Veronese-Abbildungen, das Ideal der Veronese-Fläche im $\mathbb{P}^5$, [H1, Example 2.5] und [H1, Example 2.6]. Segre-Abbildungen, das Ideal von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ im $\mathbb{P}^3$ [H1, Example 2.11]. Es lohnt ein Blick in [SKKT, Kapitel 5.1] und [SKKT, Kapitel 5.3].

(7) *Tangentialräume und Glattheit.* (Tobias Dölling) Der Tangentialraum, eventuell den Tangentialkegel erwähnen, Glattheit und das Jacobi-Kriterium, viele Beispiele mit Bildern [SKKT, Kapitel 6.1] und [SKKT, Kapitel 6.2]. Andere Darstellung finden sich in [R, §6] und [H1, Lecture 14] und sollten auf alle Fälle mit in den Vortrag einfließen. Eventuell auch die Gauß-Abbildung aus [SKKT, Kapitel 6.5] oder [H1, Example 15.2] kurz erwähnen.

(8) *Aufblasungen.* (Gebhard Martin) Aufblasen eines Punktes einer Ebene mit Illustrationen [SKKT, Kapitel 7.1], Aufblasen eines Ideals [SKKT, Kapitel 7.4] und [H1, Lecture 7]. Explizite Beispiele: Auflösung einer Kurvensingularität [H1, Example 7.17], der Zusammenhang zwischen $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ via Aufblasungen [H1, Example 7.22].

(9) *Scrolls.* (Camille Olivier Faure-Brac) Rationale Abbildungen skizzieren (Auswahl aus [H1, Lecture 7]), der “join” zweier Varietäten [H1, Example 8.1], hierfür wird [H1, Example 6.17] benötigt. Als Beispiel [H1, Exercise 8.2] und eventuell [H1, Exercise 8.4] ausführen. Sekantenvarietäten [H1, Example 8.5]. Dann eine ausführliche Diskussion von [H1, Example 8.17], und wenn noch Zeit ist, [H1, Example 8.26] besprechen.

(10) *Determinantale Varietäten.* (Johannes Luff) Als Einstieg [H1, Example 9.1], lineare determinantale Varietäten und [H1, Example 9.3], Sekanten-Varietäten an rationale Normkurven: so viel wie möglich von [H1, Proposition 9.7] beweisen, Scrolls [H1, Exercise 9.11].

(11) *Die* 27 *Geraden auf einer kubischen Fläche.* (N.N.) Existenz einer Geraden auf einer kubischen Fläche, die 27 Geraden und ihre Konfiguration [R, Chapter III.7]. Je nach Zeit und Interesse: explizite Gleichungen der Geraden im Fall der Fermat-Kubik $\sum_i x_i^3 = 0$, oder - mit etwas Mut zur Lücke - zur Operation der Weyl-Gruppe E_6 auf den 27 Geraden [H2, Exercise V.4.11].

Bei Interesse und großem Andrang:

(11) *Quotienten-Singularitäten, Hirzebruch–Jung Singularitäten.* (N.N.) [L, IV.5] und [L, IV.6].
(12) *Gewichtet projektive Räume.* (N.N.)
(13) *Hilbertpolynome.* (N.N.)
(14) *Der Satz von Bézout.* (N.N.)

LITERATUR

[H1] J. Harris, *Algebraic Geometry - A First Course*, GTM 133, Springer (1992).

[H2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer (1977).

[L] K. Lamotke, *Regular Solids and Isolated Singularities*, Vieweg (1986).

[R] M. Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, LMS 12, Cambridge University Press (1988).

[ST] J. Silverman, J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*, Springer (1992).

[SKKT] K. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen, W. Traves, *An Invitation to Algebraic Geometry*, Springer Universitext (2000).