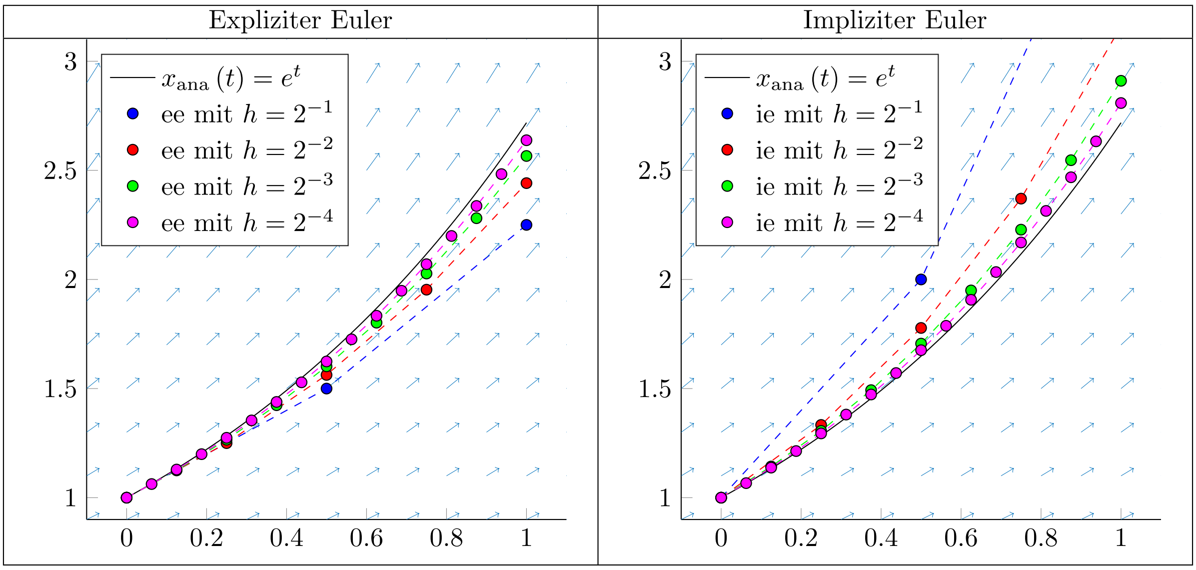
Verfahren unterschiedlicher Ordnung

Die Ordnung (genauer Konsistenzordnung) eines numerischen Verfahrens zur Lösung von ODEs gibt gewissermaßen an, wie genau ein Verfahren in jedem Schritt arbeitet und wie stark der Fehler der numerischen Lösung durch Verringerung der Schrittweite abnimmt. Besonders wichtig ist hierbei jedoch, dass nur unter der Voraussetzung von Stabilität (siehe Zusatzmaterial:"Steife Probleme") das Verfahren jemals eine korrekte Lösung liefern kann — ist jedoch Stabilität gewährleistet, so verbessert sich die Lösung mit Verkleinerung der Schrittweite gemäß der Konvergenzordnung.

Sowohl das implizite, als auch das explizite Eulerverfahren besitzen die Konsistenzordnung 1. Oft sieht man auch die Schreibweise $O(h)$, da die Genauigkeit des Verfahrens linear von der Schrittweite abhängt. Das bedeutet, dass eine Halbierung der Schrittweite auch die Größe des Fehlers halbiert.

Löst man die ODE $\dot{x} = x$, deren analytische Lösung $x_{\text{ana}}(t) = e^t$ lautet, sowohl mit dem impliziten, als auch expliziten Eulerverfahren mit unterschiedlichen Schrittweiten, so wird der Zusammenhang aus kleinerer Schrittweite und besserer numerischer Lösung deutlich:



Löst man dasselbe Problem mit der Mittelpunktsregel und dem Runge–Kutta–Verfahren, so fällt sofort auf, dass die Güte der Ergebnisse von diesen beiden Verfahren deutlich über der der beiden Eulerverfahren liegt. Bei dem Runge–Kutta–Verfahren ist schon zu Beginn mit bloßem Auge kaum eine Verbesserung festzustellen. Das liegt daran, dass die Mittelpunktsregel ein Verfahren zweiter Ordnung und das Runge–Kutta–Verfahren sogar ein Verfahren vierter Ordnung ist. Das bedeutet, bei Halbierung der Schittweite viertelt sich der Fehler ($\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$) bei Verwendung der Mittelpunktsregel und bei Verwendung des Runge–Kutta–Verfahrens beträgt der Fehler nur noch $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.