

Was ist ein Richtungsfeld?

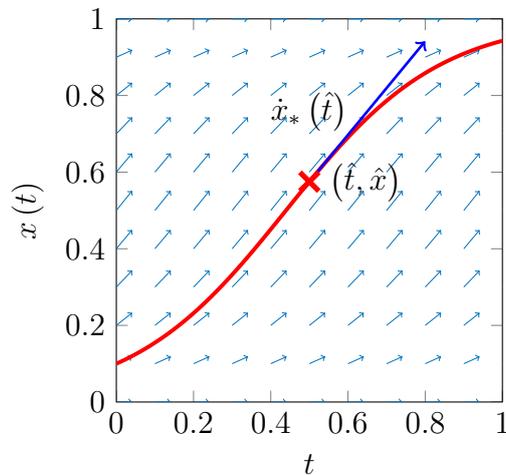
Gewöhnliche Differenzialgleichungen (ordinary differential equations = ODEs) haben allgemein folgende Form:

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Das Richtungsfeld ist dabei ein Werkzeug, mit dem sich das Verhalten von ODEs schön darstellen lässt.

Wir nehmen an, wir haben bereits eine bestimmte Lösung $x_*(t)$ zum Startwert x_0 bestimmt. Dann zeigt das Richtungsfeld die Tangente $\dot{x}_*(t) = f(x_*(t), t)$ der Lösung $x_*(t)$ der ODE in diesem Punkt. Oder anders: Die Lösung $x_*(t)$ folgt genau dem Verlauf des Richtungsfelds und beginnt bei dem Startwert x_0 .

Unten sieht man einen Plot des Richtungsfelds der ODE $f(t, x) = 5x(x - 1)$ und deren Lösung $x_*(t)$ zum Startwert $x_0 = 0,1$. Es fällt auf, dass die hervorgehobene Tangente an die Lösung am Punkt (\hat{t}, \hat{x}) sich perfekt in das Richtungsfeld einfügt. Auch an anderen Punkten sieht man, dass das Richtungsfeld sich immer tangential an die Lösung anschmiegt.



Der Umstand, dass eine beliebige Lösung immer dem Richtungsfeld folgt kommt daher, dass wir die Lösung ja genau unter der Voraussetzung bestimmt haben, dass die Steigung der Lösung \dot{x}_* in jedem Punkt mit dem Wert der Funktion $f(t, x)$ übereinstimmt. Die Steigung von x_* ist aber genau die Tangente an diese Funktion, die wir im Richtungsfeld eingezeichnet haben. Dabei ist es egal zu welchem Startwert wir die Lösung bestimmen; jede Lösung folgt dem Richtungsfeld!

