Konvergenzradius Potenzreihe

Mit der Potenzreihe kann man Funktionen einfach und effizient annähern. Taschenrechner und andere Computer berechnen so zum Beispiel oft die Werte von Sinus, Cosinus und Exponentialfunktion.

Die Reihe konvergiert nur innerhalb des Konvergenzradius ρ. Möchte man die Potenzreihe also an einem Punkt auswerten, der vom Entwicklungspunkt eine größere Entfernung hat als der Konvergenzradius $|x| > |a + \rho|$, so erhält man in der Regel kein sinnvolles Ergebnis, weil die Potenzreihe außerhalb des Konvergenzradius nicht gegen die angenäherte Funktion konvergiert.

Die geometrische Reihe ist die Potenzreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

um den Entwicklungspunkt $a = 0$ mit Konvergenzradius $\rho = 1$. Eine Konvergenz der Reihe gegen $f(x)$ können wir also nur für $x \in (-1, 1)$ erwarten.

Innerhalb des Konvergenzradius kann man $f(x)$ sehr gut durch die Potenzreihe annähern. Es gilt

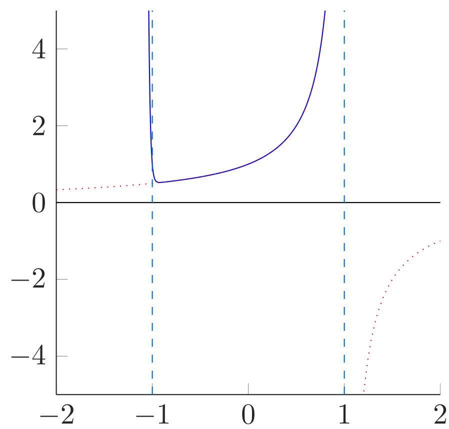
$$f(0.5) = 2 \approx \sum_{k=0}^{60} 0.5^k.$$

Rechnet man diese Summe auf dem Computer aus, so können wir $\approx$ auch ohne Probleme durch ein $=$ ersetzen, da wir uns ab $a_{60} = 1.7347 \cdot 10^{-18}$ ohnehin schon im Bereich der relativen Genauigkeit der Maschinenzahlen $\epsilon = 2.2204 \cdot 10^{-16}$ befinden. Das bedeutet, dass die Addition eines weiteren Summanden ohnehin zu keiner weiteren Veränderung des Ergebnisses führt und wir auch keine weiteren Summanden mehr berechnen müssen, da das auch weiterhin nichts ändern wird. Der Wert der Summe glücklicherweise auch tatsächlich identisch mit 2.

Wendet man dieselbe Taktik außerhalb des Konvergenzradius der Reihe an, so erhält man unter Umständen ein komplett falsches Ergebnis, da dort die Konvergenz der Reihe nicht angenommen werden kann. Für $x = 1.5$ gilt

$$f(-1.5) = 0.4 \neq -1.1031 \cdot 10^{11} = \sum_{k=0}^{60} (-1.5)^k.$$

Ein Plot der Potenzreihe für $k = 100$ zeigt noch einmal, dass außerhalb des Konvergenzradius keine sinnvollen Ergebnisse erwartet werden können.



Selbstverständlich funktioniert ein ähnliches Vorgehen auch für die Funktionen sin,cos und exp. Dabei trifft man auf keine Probleme mit dem Konvergenzradius, da dieser unendlich groß ist. Probleme können trotzdem auftreten, wenn man zum Beispiel den Wert $\sin\left(10^{10}\right)$ ausrechnen möchte, da man sehr weit vom Entwicklungspunkt entfernt ist und dementsprechend extrem viele (zu viele!) Summanden berechnen müsste. Wie könnte man dieses Problem lösen? Tipp: Der Sinus ist eine periodische Funktion!