Potenzreihe

Mit der Potenzreihe kann man Funktionen mithilfe von folgender Darstellung einfach und effizient annähern:

$$f\left(x\right) \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \left(x-a\right)^k .$$

Dabei bezeichnet a den Entwicklungspunkt der Potenzreihe. Im Limit $k \to \infty$ konvergiert die Potenzreihe innerhalb des Konvergenzradius ρ gegen die Funktion $f\left(x\right)$ und es gilt

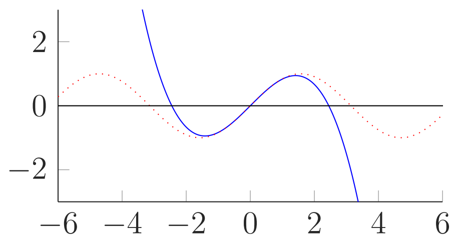
$$f\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(x-a\right)^k .$$

Der Sinus kann mit der Potenzreihe

$$\sin\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

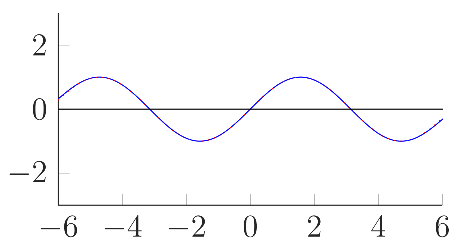
dargestellt werden. Der Entwicklungspunkt der Potenzreihe lautet $a = 0$. Der Potenzradius ist unendlich groß, wir erhalten also überall ein sinnvolles Ergebnis, wenn wir die Potenzreihe unendlich weit entwickeln.

Mit wenigen Summanden ist die Annäherung bei größerer Entfernung vom Entwicklungspunkt noch schlecht:



$$\sin\left(x\right) \approx x - \tfrac{1}{6}x^3$$

Mit zunehmender Anzahl von Summanden nimmt die Genauigkeit der Näherung jedoch immer weiter zu:



$$\sin\left(x\right) \approx x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7 + \tfrac{1}{362880}x^9 - \tfrac{1}{39916800}x^{11} + \tfrac{1}{6227020800}x^{13} - \tfrac{1}{1307674368000}x^{15}$$