Entwicklung in eine Taylorreihe

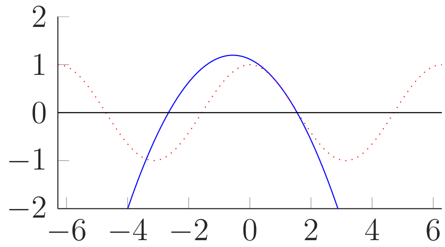
Die Taylorentwicklung ermöglicht es uns, eine bekannte Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln und dadurch eine beliebige (meist komplizierte) m–mal stetig differenzierbare Funktion in eine (meist einfachere) Potenzreihe zu entwickeln. Je näher wir uns am Entwicklungspunkt a befinden, desto genauer ist die Approximation. Folgende Formel definiert die Taylorentwicklung von $f(x)$:

$$f(x) \approx T_{m,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^m(a)}{k!}(x-a)^k .$$

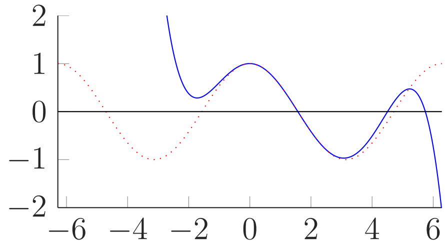
Entwickeln wir nun $\cos(x)$ um $a = 0$ erhalten wir im Limit $m \to \infty$ die (bereits bekannte?) Potenzreihe, über die der Cosinus definiert ist:

$$T_{m=\infty,f=\cos,a=1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Mit der Taylorentwicklung können wir jedoch nicht nur bekannte Potenzreihen verifizieren, sondern eine Funktion an beliebigen Entwicklungspunkten a entwickeln. Wählen wir $a = 1$ erhalten wir eine komplett neue Funktion. Je mehr Summanden wir verwenden, desto genauer wird unsere Näherung, bis schließlich für $m \to \infty$ die Funktion exakt wiedergegeben werden kann. Für Polynome erhalten wir selbstverständlich die exakte Funktion sobald m dem Grad des Polynoms entspricht.



$$T_{2,\cos,1}(x) = 0.5403 - 0.8415(x-1) - 0.2702(x-1)^2$$



$$T_{5,\cos,1}(x) = 0.5403 - 0.8415(x-1) - 0.2702(x-1)^2 + 0.1402(x-1)^3 + 0.0225(x-1)^4 - 0.007(x-1)^5$$