Fourierreihe

Die Fourierreihe stellt eine Möglichkeit dar, periodische Funktionen annähernd darzustellen. Dabei nähert man die 2π–periodische Funktion $f(x)$ durch die Summe

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)$$

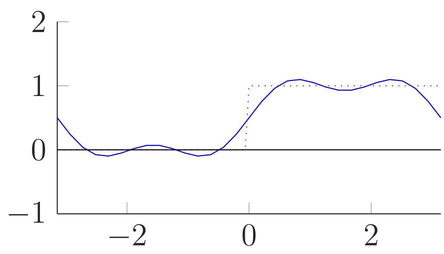
an. Diese Summe nennt man Fourierreihe von f. Die Fourierreihe ist eine endliche Summe mit bis zu $2n+1$ Summanden. Je größer man n wählt desto genauer approximiert die Fourierreihe die Funktion f bis schließlich für die unendliche Summe (also $n \to \infty$) gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix).$$

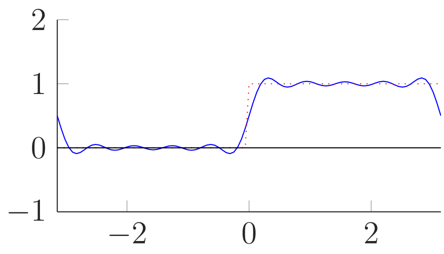
Möchte man nun zum Beispiel die Stufenfunktion

$$s(x) = \begin{cases} 0, & x <= 0 \\ 1, & 0 < x \end{cases}$$

durch eine Fourierreihe mit $n = 3$ und $n = 10$ annähern, erhält man die folgenden Darstellungen.



$$s(x) \approx 0.5 + 0.6366 \sin(x) + 0.2122 \sin(3x)$$



$$s(x) \approx 0.5 + 0.6366 \sin(x) + 0.2122 \sin(3x) + 0.1273 \sin(5x) + 0.0909 \sin(7x) + 0.0707 \sin(9x)$$

Man sieht, dass

- die Koeffizienten schnell abfallen,
- nur Sinusterme auftauchen, da die Funktion ungerade ist,
- mit steigendem n die Genauigkeit zunimmt und
- das Gibbs'sche Phänomen bei Unstetigkeiten(Overshoot).