Die Cohen-Macaulay-Eigenschaft in der modularen Invariantentheorie

Habilitationsschrift von Gregor Kemper
IWR, Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 368
69 120 Heidelberg, Germany
email Gregor.Kemper@iwr.uni-heidelberg.de

12. Mai 1999

Zusammenfassung

Der Satz von Hochster und Roberts besagt, daß Invariantenringe von linear reduktiven Gruppen Cohen-Macaulay sind. In der vorliegenden Arbeit geht es zunächst um die Frage, in wieweit eine Umkehrung dieses Satzes gilt. Als Verallgemeinerung von Invarianten von Gruppen werden hierbei auch Invarianten von Hopf-Algebren betrachtet. Die Verwendung kohomologischer Methoden erweist sich als das wesentliche Hilfsmittel. Als erstes Hauptresultat ergibt sich: Falls für eine geometrisch reduktive Hopf-Algebra Λ der Invariantenring bezüglich jeder linearen Darstellung Cohen-Macaulay ist, so ist Λ linear reduktiv. Für den Spezialfall von Gruppenoperationen liefert dies eine teilweise Umkehrung des Satzes von Hochster und Roberts, und zusammen mit Sätzen von Nagata und Popov eine Charakterisierung von linear reduktiven Gruppen durch ihre Invarianten. Für Lie-Algebren ergibt sich, daß jede modulare Lie-Algebra $\mathfrak{g} \neq 0$ lineare Darstellungen besitzt, deren Invariantenring nicht Cohen-Macaulay ist.

Für Operationen endlicher Gruppen werden weitergehende Resultate erzielt. Diese beinhalten eine Klassifikation der endlichen Gruppen, so daß der Invariantenring bezüglich der regulären Darstellung Cohen-Macaulay ist, sowie das Ergebnis, daß der Invariantenring einer p-Gruppe G nur Cohen-Macaulay sein kann, falls G durch Bireflexionen erzeugt wird, wobei p die Charakteristik des Grundkörpers bezeichnet. Schließlich wird der Nicht-Cohen-Macaulay Ort von Invariantenringen untersucht. Neben der expliziten Bestimmung für einige Klassen von Gruppen ergibt sich durch Benutzung des Scheibensatzes von Luna, daß der Nicht-Cohen-Macaulay Ort mindestens die Dimension 1 und die Kodimension 3 besitzt, falls er nicht leer ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Anliegen der Invariantentheorie ist die Untersuchung von Invarianten und Äquivarianten unter der Operation einer Gruppe G. In der klassischen Situation operiert G als lineare Gruppe auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V und damit auch auf der symmetrischen Algebra $R = S(V^*)$, also dem Polynomring mit Basisvektoren des Dualraums V^* als Unbestimmten. Der Invariantenring ist

$$R^G = \{f \in R \mid \sigma(f) = f \ \forall \sigma \in G\}.$$

Ist W eine weitere lineare Darstellung von G, so können wir auch den Modul $(R \otimes W)^G$ der Äquivarianten (auch „Kovarianten") betrachten. Ist der Grundkörper K unendlich, so lassen sich die Elemente von $(R \otimes W)^G$ als polynomiale Funktionen von V nach W deuten, die mit der Operation von G vertauschen. Interessant sind strukturelle Aussagen über R^G und $(R \otimes W)^G$, aber auch rechnerische Daten, wie zum Beispiel endliche Erzeugendensysteme.

Der berühmte Satz von Hochster und Roberts [29] besagt, daß R^G Cohen-Macaulay ist, sofern G eine linear reduktive Gruppe ist. Für die Zwecke dieser Einleitung soll es genügen, die Cohen-Macaulay-Eigenschaft wie folgt zu charakterisieren: R^G ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn es algebraisch unabhängige, homogene Invarianten $f_1, \dots, f_n$ gibt, so daß R^G ein endlich erzeugter freier Modul über der von den f_i erzeugten Unteralgebra $K[f_1, \dots, f_n]$ ist. Somit liefert der Satz von Hochster und Roberts eine wichtige Strukturaussage: Alle Invariantenringe von linear reduktiven Gruppen sind endlich erzeugte freie Moduln über einer Polynomalgebra. Für endliche Gruppen G war dieser Satz schon länger bekannt (Hochster und Eagon [28]). Eine endliche Gruppe G ist genau dann linear reduktiv, wenn die Charakteristik von K kein Teiler der Gruppenordnung ist. In diesem Fall ist nicht nur R^G, sondern auch jeder Modul $(R \otimes W)^G$ von Äquivarianten Cohen-Macaulay (was interessanterweise für linear reduktive Gruppen im allgemeinen falsch ist, siehe Van den Bergh [6]). Dieses Resultat vereinfacht das Berechnen von Erzeugern für die Invarianten oder Äquivarianten einer endlichen Gruppe G mit $\operatorname{char}(K) \nmid |G|$ erheblich. Man konstruiert als ersten Schritt ein homogenes Parametersystem $f_1, \dots, f_n \in R^G$ (siehe hierzu Sturmfels [70, Abschnitt 2.5] oder Kemper [38]). Das Berechnen von Erzeugern von R^G oder $(R \otimes W)^G$ über $K[f_1, \dots, f_n]$ reduziert sich dann wegen der Cohen-Macaulay-Eigenschaft auf das Lösen von linearen Gleichungssystemen über K. Einzelheiten hierzu finden sich in Kemper [35] oder [37], wo auch ein wesentlich aufwendigerer Algorithmus für den Fall, daß die Charakteristik von K die Gruppenordnung teilt, gegeben wird. Damit dürfte klar geworden sein, daß die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von großem Interesse in der Invariantentheorie ist.

Für nicht linear reduktive Gruppen G, also insbesondere für endliche Gruppen mit durch $\operatorname{char}(K)$ teilbarer Ordnung, ist der Invariantenring R^G im allgemeinen nicht Cohen-Macaulay. Trotzdem gibt es Beispiele, in denen die Cohen-Macaulay-Eigenschaft auch in diesem Fall zutrifft, wie etwa bei den symmetrischen und alternierenden Gruppen in ihrer definierenden Darstellung. Es erhebt sich also die Frage, ob es eine einfache Charakterisierung von linearen Gruppen $G \leq \mathrm{GL}(V)$ gibt, so daß R^G Cohen-Macaulay ist.

Der Wissensstand. Obwohl es zur Frage nach der Cohen-Macaulay-Eigenschaft in der modularen Invariantentheorie einige Arbeiten gibt, ist der bisherige Kenntnisstand relativ bruchstückhaft. Das erste Beispiel eines Invariantenrings, der nicht Cohen-Macaulay ist, taucht meines Wissens bei Bertin [7] auf. Es handelt sich dabei um die zyklische Gruppe der Ordnung 4 mit der regulären Darstellung über $K = \mathbb{F}_2$. In der Arbeit von Fossum und Griffith [23] erscheinen weitere Fälle, in denen die Invariantenringe von zyklischen p-Gruppen nicht Cohen-Macaulay sind. Die Frage nach der Cohen-Macaulay-Eigenschaft für zyklische p-Gruppen ($p = \operatorname{char}(K)$) wurde dann von Ellingsrud und Skjelbred [19] gelöst: R^G ist in diesem Fall genau dann Cohen-Macaulay, wenn $\dim(V^G) \geq \dim(V) - 2$ gilt. Ellingsrud und Skjelbred gaben darüber hinaus eine Formel für die Tiefe der Invariantenringe an. Außerdem lieferten sie eine untere Schranke für die Tiefe von R^G im Fall von p-Gruppen G. Kombiniert man diese mit dem Resultat von Campbell et al. [12], daß für eine endliche Gruppe G mit einer p-Sylowgruppe P die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von R^G aus der von R^P folgt, so ergibt sich, daß R^G Cohen-Macaulay ist, falls $\dim(V) \leq 3$ (siehe auch Smith [65]). Ein weiteres Ergebnis für p-Gruppen stammt von Campbell et al. [14]. Es besagt, daß für eine p-Gruppe G mit einer treuen Darstellung auf V der Invariantenring $S(V^n)^G$ für $n \geq 3$ nicht Cohen-Macaulay ist, wobei V^n die direkte Summe von n Kopien von V bezeichnet. Es ist bekannt, daß der Invariantenring einer Spiegelungsgruppe in positiver Charakteristik im allgemeinen kein Polynomring ist (siehe Nakajima [53], Kemper und Malle [42]). Wie „schlecht" die Eigenschaften von modularen Invariantenringen von Spiegelungsgruppen sein können, zeigt eine von Nakajima [54] angegebene Serie abelscher Transvektionsgruppen, deren Invariantenringe nicht Cohen-Macaulay sind. Smith [66] benutzte die Kohomologie von G mit Werten in einem gewissen Koszul-Komplex für die Untersuchung der Tiefe und der Cohen-Macaulay-Eigenschaft. Er erhielt dadurch einen neuen Beweis der Tiefen-Formel von Ellingsrud und Skjelbred in dem Fall von Gruppen der Ordnung p mit Permutationsdarstellungen.

Methoden und Ergebnisse der Arbeit. In der vorliegenden Arbeit wird die Kohomologie $H^i(G, R)$ mit Werten im Polynomring R benutzt, um die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von Invariantenringen zu untersuchen. $H^i(G, R)$ ist ein Modul über dem Invariantenring, und es stellt sich heraus, daß Annullatoren von Elementen in $H^i(G, R)$ von entscheidender Bedeutung für die Cohen-Macaulay-Eigenschaft sind. Solche Annullatoren sind Ideale im Invariantenring, und die Untersuchung der Geometrie dieser Ideale erweist sich als wichtiges Hilfsmittel zur Analyse der Cohen-Macaulay-Eigenschaft. So gelingt es in vielen Fällen, durch das Erzeugen von genügend großen Annullatoren das Fehlen der Cohen-Macaulay-Eigenschaft nachzuweisen. Unter der Beschränkung auf $H^1(G, K)$ ist eine exakte Bestimmung der durch einen Annullator gegebenen Varietät in $V/\!\!/G$ möglich, was zu weiteren Ergebnissen führt. Methodisch ist die Arbeit also an dem Schnittpunkt der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie mit der modularen Darstellungstheorie und Kohomologietheorie angesiedelt. Außerdem werden Ergebnisse und Methoden aus der Theorie der Hopf-Algebren, der Lie-Algebren und der algebraischen Gruppen, sowie aus der Computeralgebra und natürlich der Invariantentheorie benutzt. Um eine möglichst hohe Allgemeinheit zu erreichen, ist für R an vielen Stellen eine endlich erzeugte K-Algebra zugelassen, d.h. wir betrachten Operationen auf affinen Schemata, und als Verallgemeinerung von Gruppenoperationen betrachten wir Operationen von Hopf-Algebren. Die Hauptergebnisse sind die folgenden:

(1) Ist G eine endliche Gruppe und K ein Körper, so ist $S(V)^G$ genau dann Cohen-Macaulay für alle endlich erzeugten KG-Moduln V, wenn $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$ (Korollar 2.14). Dies stellt eine Umkehrung des oben genannten Satzes von Hochster und Eagon dar.

(2) Allgemeiner gilt: Eine reduktive lineare algebraische Gruppe G ist genau dann linear reduktiv, falls $S(V)^G$ für alle G-Moduln V Cohen-Macaulay ist (Satz 2.15). Zusammen mit Sätzen von Nagata und Popov ergibt sich hieraus eine Charakterisierung von linear reduktiven Gruppen innerhalb der linearen algebraischen Gruppen durch ihre Invariantenringe (Korollar 2.17).

(3) Wir formulieren das obige Resultat allgemeiner für Invarianten von Hopf-Algebren (Satz 2.13). Für die Spezialfälle von universell Einhüllenden von Lie-Algebren und Koordinatenringen von abelschen linearen algebraischen Gruppen liefert Satz 2.13 folgende Aussagen: Ist $\mathfrak{g} \neq 0$ eine Lie-Algebra über einem Körper positiver Charakteristik, so existiert eine endlich dimensionale Darstellung V, so daß $S(V)^{\mathfrak{g}}$ nicht Cohen-Macaulay ist (Korollar 2.19). Ist $K[G]$ der Koordinatenring einer abelschen linearen algebraischen Gruppe G mit $\mathrm{char}(K) > 0$, so sind genau dann alle Invariantenringe $S(V)^{K[G]}$ von endlich dimensionalen $K[G]$-Moduln V Cohen-Macaulay, wenn G endlich ist (Korollar 2.21).

(4) Für eine endliche Gruppe G sei M^G Cohen-Macaulay, wobei $M = S(V^*) \otimes W$ mit endlich erzeugten KG-Moduln V und W. Ist dann $H^r(G, M) \neq 0$ für ein $r > 0$, so muß ein $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{char}(K)$ und $\mathrm{rk}_V(\sigma - 1) \leq r + 1$ existieren (Korollar 3.7). Dies liefert starke

Einschränkungen für lineare Gruppen, deren Invariantenring bzw. Modul von Äquivarianten Cohen-Macaulay ist.

(5) Damit gelingt es, die Paare (G, K) von endlichen Gruppen G und Körpern K, für die $S(V_{\text{reg}})^G$ Cohen-Macaulay ist, zu klassifizieren (Satz 3.14). Dabei bezeichnet V_{reg} die reguläre Darstellung von G über K.

(6) Ist V eine treue Darstellung einer endlichen Gruppe G, deren Ordnung ein Vielfaches von $\text{char}(K)$ ist, so existiert ein $m > 0$, so daß $S(V^n)^G$ für $n \geq m$ nicht Cohen-Macaulay ist. Dies wird unter relativ schwachen Zusatzvoraussetzungen für Operationen von G auf endlich erzeugten Algebren R gezeigt (Satz 3.9).

(7) Ist $G = S_n$ die symmetrische Gruppe mit $n > 5$ und $5 \leq \text{char}(K) =: p$ ein Teiler von n, so gilt für die irreduzible, $(n-2)$-dimensionale Spiegelungsdarstellung V von G über K, daß $S(V)^G$ nicht Cohen-Macaulay ist (Beispiel 3.17).

(8) Falls G endlich und $S(V)^G$ Cohen-Macaulay ist, so gilt: Ist G nilpotent, so wird die p-Sylowgruppe von G durch Bireflexionen erzeugt, also durch Elemente, die einen Unterraum der Kodimension 2 von V punktweise festlassen. Haben alle maximalen Normalteiler von G den Index p, so wird G durch Bireflexionen erzeugt. Auch dies wird allgemeiner für Operationen auf endlich erzeugten Algebren gezeigt (Korollar 4.11). Hieraus folgt der Spezialfall von p-Gruppen eines Satzes von Kac und Watanabe [34], aber unter viel schwächeren Voraussetzungen (siehe Anmerkung 4.12).

(9) Wir geben eine einfache Beschreibung des Nicht-Cohen-Macaulay Orts, also der Menge aller $P \in \text{Spec}(R^G)$, so daß die Lokalisierung $(R^G)_P$ nicht Cohen-Macaulay ist (siehe Satz 5.12). Aus dieser folgt, daß der Nicht-Cohen-Macaulay Ort mindestens die Dimension 1 und höchstens die Dimension $n-3$ mit $n := \dim(V)$ hat, falls er nicht leer ist. Im Gegensatz dazu ist für die Dimension des singulären Orts die obere Schranke $n-2$ bekannt. Außerdem gelingt es, für einige Klassen von Gruppen den Nicht-Cohen-Macaulay Ort explizit zu bestimmen (siehe Satz 5.16 und Beispiel 5.17). Darunter ist auch die von Nakajima [54] angegebene Serie abelscher Transvektionsgruppen.

Aufbau der Arbeit. Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit geht es um die Frage, unter welchen Bedingungen eine R-reguläre Sequenz mit Elementen im Invariantenring R^G auch R^G-regulär ist. Die Beobachtung, daß sich hierfür ein homologisches Kriterium angeben läßt, ist der Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen. Dieses Kriterium wird zunächst für erste Kohomologiegruppen formuliert und dann mit Hilfe des Koszul-Komplexes auf höhere Kohomologiegruppen „hochgezogen“. Für den Fall endlicher Gruppen bekommen wir als notwendige Bedingung für die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von R^G eine obere Schranke für die Höhen der Annullatoren von Elementen von $H^1(G, R)$ (siehe Korollar 1.18, wo die Formulierung allgemeiner ist). Die Untersuchungen werden für Hopf-Algebren (als Verallgemeinerung von Gruppenringen KG) durchgeführt.

Abschnitt 2 ist unendlichen Gruppenoperationen gewidmet. Allgemeiner betrachten wir Operationen von Hopf-Algebren auf Ringen und führen Begriffe von linearer- bzw. geometrischer Reduktivität von Hopf-Algebren ein. Für eine Hopf-Algebra Λ, die geometrisch reduktiv, aber nicht linear reduktiv ist, konstruieren wir einen Modul V mit einem $0 \neq \alpha \in \text{Ext}^1_\Lambda(K, S(V))$ und einem genügend großen Annullator von α, um das Fehlen der Cohen-Macaulay-Eigenschaft von $S(V)^\Lambda$ nachzuweisen. Dies führt zu der oben angegebenen Charakterisierung von linear reduktiven Gruppen. Entscheidend ist die Konstruktion von Moduln mit Annullatoren für ein gegebenes $\alpha \in \text{Ext}^1_\Lambda(K, V)$ (Lemma 2.12). Die Analyse der Reduktivitätsbegriffe für universell Einhüllende von Lie-Algebren und Koordinatenringe abelscher linearer algebraischer Gruppen führt zu den in (3) genannten Ergebnissen.

Für endliche Gruppen liefert der reguläre Modul Annullatoren von Elementen in $H^i(G, V)$. Daher wird in Abschnitt 3 versucht, möglichst viele Kopien des regulären Moduls in R einzubetten, um einen Annullator von genügender Höhe zu erzeugen. Dies liefert die in (4) genannte notwendige Bedingung für die Cohen-Macaulay-Eigenschaft. Die Ergebnisse über Vektorinvarianten, Invarianten der regulären Darstellung und Invarianten von irreduziblen Spiegelungsdarstellungen der symmetrischen Gruppe sind unmittelbare Anwendungen. Man kann die Bedingung in (4) auch „rückwärts" lesen und erhält aus einfachen Tatsachen aus der Invariantentheorie nicht-triviale Aussagen über Gruppenkohomologie (Beispiel 3.18).

Im vierten Abschnitt betrachten wir nur Elemente aus $H^1(G, K)$. Dies ist eine drastische Einschränkung der in Abschnitt 1 gegebenen Möglichkeiten, liefert aber den entscheidenden Vorteil, daß eine exakte Bestimmung des Annullators (oder genauer dessen Varietät in $\mathrm{Spec}(R^G)$) möglich wird. Wir benutzen hierzu die relative Spurabbildung (auch „Transfer"), und zeigen, daß der relative Spurort, der wilde Verzweigungsort und die Varietät des Annullators übereinstimmen (siehe Abschnitt 4.1 für die Definitionen). Als Anwendungen ergeben sich der in (8) genannte Satz über Bireflexionen und ein neuer Beweis für die Nicht-Cohen-Macaulay-Eigenschaft bei der von Nakajima angegebenen Serie von abelschen Transvektionsgruppen.

Die Bestimmung der Varietät von Annullatoren aus Abschnitt 4 wird im fünften Abschnitt benutzt, um untere Schranken für den Nicht-Cohen-Macaulay Ort von Invariantenringen endlicher Gruppen zu erhalten. Andererseits ergeben sich obere Schranken aus einer Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Broer [10]. Auch hier spielt die relative Spurabbildung eine wichtige Rolle. In der spezielleren Situation einer Operation von G auf einem Vektorraum V liefert der Scheibensatz von Luna eine sehr einfache Beschreibung des Nicht-Cohen-Macaulay Orts: Grob gesagt liegt ein Punkt $x \in V$ genau dann im Nicht-Cohen-Macaulay Ort, wenn der Invariantenring des Stabilisators G_x nicht Cohen-Macaulay ist. Dies ermöglicht es, aus Resultaten über die „globale" Cohen-Macaulay-Eigenschaft aus den vorherigen Abschnitten lokale Aussagen zu gewinnen. Von einigen Klassen von Gruppen läßt sich der Nicht-Cohen-Macaulay Ort exakt bestimmen. Dazu gehören die direkten Produkte $G = N \times Z$, wobei N eine endliche Gruppe mit $\mathrm{char}(K) =: p \nmid |N|$ und Z eine zyklische p-Gruppe ist.

Einige der Resultate aus den Abschnitten 1 bis 4 sind schon zur Publikation eingereicht [41] oder erscheinen demnächst [40].

Als Standardliteratur zur kommutativen Algebra bzw. zur Kohomologietheorie benutzen wir die Bücher von Eisenbud [18] bzw. Benson [3]. Als Einführungen in die Invariantentheorie endlicher bzw. algebraischer Gruppen sei auf Benson [5] bzw. Popov und Vinberg [58] verwiesen. Für die Theorie der Cohen-Macaulay-Eigenschaft dient in erster Linie das Buch von Bruns und Herzog [11] als Referenz.

Ausblick. In dieser Arbeit werden die endlichen Gruppen klassifiziert, für die alle Invariantenringe linearer Darstellungen Cohen-Macaulay sind. Trotzdem ist die Frage, wann für eine gegebene *lineare* Gruppe (also eine Gruppe mit einer Darstellung) der Invariantenring Cohen-Macaulay ist, im allgemeinen noch offen. Hier wird nur für einige Klassen von Darstellungen eine Antwort gegeben. Die zur Verfügung gestellten Methoden deuten aber darauf hin, daß sich mit einer genaueren geometrischen Untersuchung der Kohomologiegruppen $H^i(G, R)$ (d.h. der assoziierten Primideale dieser Gruppen als Moduln über dem Invariantenring) weitere Ergebnisse erzielen lassen. Abgesehen von dem Fall $H^1(G, K)$ fehlt eine solche geometrische Beschreibung zur Zeit noch. Über die Cohen-Macaulay-Eigenschaft hinaus ist die Tiefe von Invariantenringen interessant. Mit ihr läßt sich die Abweichung von der Cohen-Macaulay-Eigenschaft messen. Für eine explizit gegebene endliche lineare Gruppe läßt sich die Tiefe algorithmisch berechnen (siehe Kemper [37]). Was die Bestimmung der Tiefe für gewisse Klassen von Gruppen betrifft, wurden die ersten (und lange Zeit einzigen) Ergebnisse durch die wichtige Arbeit von Ellingsrud und Skjelbred [19] erzielt. An diese Arbeit knüpften Campbell et al. [15] und kürzlich Shank und Wehlau [61] an.

Darüber hinaus sind weitere Fragen nach strukturellen Eigenschaften von (modularen) Invariantenringen nicht oder nur teilweise gelöst. Wann ist ein Invariantenring Gorenstein, vollständiger Durchschnitt oder ein Polynomring? Einzelheiten zu diesen Fragen finden sich in dem Übersichtsartikel von Kemper und Malle [44]. Von großem geometrischen Interesse sind außerdem die Orte in der Quotientenvarietät $V/\!\!/G = \operatorname{Spec}(R^G)$, wo die entsprechenden Eigenschaften gelten. Beispielsweise ist der Invariantenring genau dann ein Polynomring, wenn er überall glatt ist. Die in dieser Arbeit enthaltenen Ergebnisse zum Nicht-Cohen-Macaulay Ort könnten weitere Untersuchungen zu diesen Fragen anregen.

Dank. An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor B. Heinrich Matzat für seine Unterstützung und für zahlreiche Anregungen bedanken. Er ist der Leiter der Arbeitsgruppe „Computergestützte Algebra" am Interdisziplinären Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen in Heidelberg, der ich angehöre. Wichtige Teile dieser Arbeit entstanden während eines Gastaufenthalts an der Queen's University in Kingston (Kanada). Ich danke Ian Hughes, Eddy Campbell, Jim Shank und David Wehlau für ihre Gastfreundschaft und für zahlreiche Anregungen, die sie mir gaben. Die Arbeit hat von vielen weiteren interessanten Gesprächen oder Korrespondenzen mit verschiedenen Mathematikern profitiert. Erwähnt seien hier David Benson, Winfried Bruns, Peter Fleischmann, Hanspeter Kraft, Kay Magaard, Jürgen Müller, Vladimir Popov, Jean-Pierre Serre und Jacques Thévenaz. Ihnen gilt mein Dank. Wertvolle Hinweise und Korrekturen zu einer ersten Version verdanke ich Gunter Malle. Schließlich bedanke ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung.

1 Die Cohen-Macaulay-Eigenschaft und Kohomologie

In diesem Abschnitt führen wir kohomologische Methoden für das Studium der Cohen-Macaulay-Eigenschaft ein. Zunächst klären wir einige Konventionen und Notationen.

1.1 Reguläre Sequenzen und Tiefe

In dieser Arbeit sind alle Algebren (außer Hopf-Algebren, Lie-Algebren und Gruppenalgebren) assoziativ, kommutativ und mit Eins, und alle Ringe sind kommutativ mit Eins, wenn nichts anderes gesagt wird. Moduln schreiben wir immer als Links-Moduln. Für einen Ring R und einen R-Modul M benutzen wir die folgenden Schreibweisen:

- Für $f \in M$ ist $\operatorname{Ann}(f) = \operatorname{Ann}_R(f) = \{a \in R \mid af = 0\}$ der **Annullator** von f.
- $\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}_R(M) = \bigcap_{f \in M} \operatorname{Ann}(f)$ ist der **Annullator** von M.
- Die **Krull-Dimension** von R wird mit $\dim(R)$ bezeichnet.
- Die **Dimension** von M ist $\dim(M) = \dim(R/\operatorname{Ann}(M))$. Für $M = 0$ setzen wir $\dim(M) := -1$.
- $\operatorname{Spec}(R)$ ist die Menge aller Primideale in R, und $\operatorname{Spec}_{\max}(R)$ die Menge aller maximalen Ideale. Dabei sind Primideale und maximale Ideale immer echt in R enthalten.
- $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}_R(M) = \{P \in \operatorname{Spec}(R) \mid \operatorname{Ann}(M) \subseteq P\}$ ist der **Träger** von M.
- Für ein Primideal $P \in \operatorname{Spec}(R)$ ist R_P bzw. M_P die **Lokalisierung** von R bzw. M bei P.
- Für ein Ideal $I \subsetneqq R$ ist
  $$\operatorname{ht}(I, M) = \inf\{\dim(M_P) \mid P \in \operatorname{Spec}(R) \text{ mit } I \subseteq P\}$$
  die **Höhe** von I bezüglich M. Wir setzen $\operatorname{ht}(R, M) := \dim(M) + 1$ und $\operatorname{ht}(I) := \operatorname{ht}(I, R)$.
- Für $a_1, \ldots, a_m \in R$ ist
  $$(a_1, \ldots, a_m)M = \{a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m \mid f_1, \ldots, f_m \in M\}.$$
- R heißt **graduierter Ring**, falls es Untergruppen $R_0, R_1, R_2, \ldots$ der additiven Gruppe von R gibt, so daß $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ und $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ für $i, j \geq 0$ gelten. Dann ist $R_+ := \bigoplus_{d > 0} R_d \subsetneqq R$ ein Ideal. M heißt graduierter R-Modul, falls $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ mit Untergruppen M_d von M, so daß $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ für $i, j \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$ gilt.

Definition 1.1. *Es seien R ein Ring und M ein R-Modul.*

*(a) Eine Sequenz $a_1, \ldots, a_m \in R$ heißt M-**regulär**, falls für $1 \leq i \leq m$ die Multiplikation mit a_i auf $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ eine injektive Abbildung ist, und außerdem $(a_1, \ldots, a_m)M \neq M$ gilt.*

*(b) Für ein Ideal $I \subseteq R$ ist die **Tiefe** von I auf M die maximale Länge einer M-regulären Sequenz mit Elementen aus I:*

$$\operatorname{depth}(I, M) = \sup\{m \mid \text{es gibt eine } M\text{-reguläre Sequenz } a_1, \ldots, a_m \in I\}.$$

Falls $M = 0$, so setzen wir $\operatorname{depth}(I, M) = -1$. *Ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal P, so schreiben wir* $\operatorname{depth}(M) := \operatorname{depth}(P, M)$ *für die **Tiefe** von M. Sind R und M graduiert, so setzen wir* $\operatorname{depth}(M) := \operatorname{depth}(R_+, M)$.

(c) *Ist R ein lokaler Ring, so heißt M* **Cohen-Macaulay**, *falls* $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$. *Allgemein heißt M* **Cohen-Macaulay**, *falls für jedes maximale Ideal $P \in \operatorname{Spec}(R)$ die Lokalisierung M_P Cohen-Macaulay (über R_P) ist. R heißt* **Cohen-Macaulay**, *falls R als Modul über sich selbst Cohen-Macaulay ist.*

Sind R eine graduierte Algebra über einem Körper $K = R_0$ und M ein graduierter R Modul (z.B. $M = (S(V^*) \otimes W)^G$ mit G einer Gruppe und V und W endlich dimensionalen Darstellungen), so ist M genau dann Cohen-Macaulay, wenn M ein endlich erzeugter freier Modul über einer Unteralgebra von R ist, welche isomorph zu einer Polynomalgebra ist (siehe Benson [5, Theorem 4.3.5]). Dieser Zusammenhang wurde in der Einleitung erwähnt. Eine weitere zur Cohen-Macaulay-Eigenschaft äquivalente Bedingung ist, daß $\operatorname{depth}(M) = \dim(M)$ gilt (siehe Bruns und Herzog [11, Exercise 2.1.27]). Wir stellen einige wichtige Tatsachen über Tiefe und die Cohen-Macaulay-Eigenschaft zusammen.

Proposition 1.2. *Es seien R ein Noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gelten:*

(a) *Es sei $I \subsetneqq R$ ein Ideal mit $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \sqrt{I}$. Dann haben alle maximalen (d.h. nicht verlängerbaren) M-regulären Sequenzen in I dieselbe Länge.*

(b) *Es sei $I \subsetneqq R$ ein Ideal mit $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \sqrt{I}$. Dann gilt*

$$\operatorname{depth}(I, M) \leq \operatorname{ht}(I, M).$$

(c) *M ist genau dann Cohen-Macaulay, wenn für alle Ideale $I \subsetneqq R$ mit $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \sqrt{I}$ gilt:*

$$\operatorname{depth}(I, M) = \operatorname{ht}(I, M).$$

Beweis. Sei $I \subsetneqq R$ ein Ideal mit $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \sqrt{I}$. Dann gilt $IM \neq M$, denn sonst gäbe es ein maximales Ideal $P \in \operatorname{Supp}(M)$ mit $PM = M$, also nach dem Lemma von Nakayama $M_P = 0$, ein Widerspruch. Die Behauptung (a) folgt nun nach Bruns und Herzog [11, Theorem 1.2.5]. Weiter gilt nach Bruns und Herzog [11, Proposition 1.2.10 und 1.2.12]

$$\begin{aligned}\operatorname{depth}(I, M) = \min\{\operatorname{depth}(M_P) \mid P \in \operatorname{Spec}(R) \text{ mit } I \subseteq P\} \leq \\ \leq \min\{\dim(M_P) \mid P \in \operatorname{Spec}(R) \text{ mit } I \subseteq P\} = \operatorname{ht}(I, M),\end{aligned}$$

also Behauptung (b).

Es gelte nun $\operatorname{depth}(I, M) = \operatorname{ht}(I, M)$ für alle Ideale $I \subsetneqq R$ mit $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \sqrt{I}$. Insbesondere gilt für maximale Ideale $P \in \operatorname{Supp}(M)$

$$\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{ht}(P, M) = \dim(M_P),$$

also existiert eine M-reguläre Sequenz der Länge $\dim(M_P)$ in P, die nach Bruns und Herzog [11, Corollary 1.1.3] auch M_P-regulär ist. Es folgt $\operatorname{depth}(M_P) = \dim(M_P)$, und die eine Richtung von (c) ist gezeigt.

Für die andere Richtung gehen wir durch Induktion nach $\operatorname{depth}(I, M)$ vor. Ist $\operatorname{depth}(I, M) = 0$, so gilt nach Bruns und Herzog [11, Proposition 1.2.10 und 2.1.3]

$$0 = \min\{\operatorname{depth}(M_P) \mid P \in \operatorname{Spec}(R) \text{ mit } I \subseteq P\} = \operatorname{ht}(I, M),$$

wie behauptet. Sei nun $\operatorname{depth}(I, M) > 0$. Dann existiert $a \in I$ so daß a eine M-reguläre Sequenz bildet, und nach Bruns und Herzog [11, Theorem 2.1.3] ist mit M auch M/aM Cohen-Macaulay. Nach (a) und Induktion folgt

$$\operatorname{depth}(I, M) - 1 = \operatorname{depth}(I, M/aM) = \operatorname{ht}(I, M/aM).$$

Für $P \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $I \subseteq P$ gilt

$$\dim\left((M/aM)_P\right) = \dim(M_P/aM_P) = \dim(M_P) - 1,$$

da a auch M_P-regulär und damit nach Bruns und Herzog [11, Proposition 1.2.12] Teil eines Parametersystems von M_P ist. Es folgt $\operatorname{ht}(I, M/aM) = \operatorname{ht}(I, M) - 1$, ingesamt also wie behauptet $\operatorname{depth}(I, M) = \operatorname{ht}(I, M)$. □

1.2 Homologische Kriterien

Hopf-Algebren. Nun bringen wir eine Operation einer Hopf-Algebra (z.B. einer Gruppenalgebra) ins Spiel.

Definition 1.3. *Es sei Λ eine Hopf-Algebra über einem Ring K (siehe Benson [3, Definition 3.1.4]). Δ: $\Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda$ sei die Komultiplikation und ϵ: $\Lambda \to K$ die Koeinheit, wobei alle Tensorprodukte über K sind. Für einen Λ-Modul V heißt*

$$V^\Lambda = \{v \in V \mid \lambda v = \epsilon(\lambda) v \ \forall \lambda \in \Lambda\}$$

der **Invariantenmodul** *(siehe Montgomery [49, S. 13]). Eine K-Algebra R heißt* **Λ-Algebra***, falls R eine Struktur als Λ-Modul hat, so daß die Abbildung*

$$R \otimes_K R \to R, \ a \otimes b \mapsto ab$$

ein Homomorphismus von Λ-Moduln ist und $1_R \in R^\Lambda$ gilt. Ein Modul M über einer Λ-Algebra R heißt **$(R\#\Lambda)$-Modul***, falls er eine Struktur als Λ-Modul hat, so daß*

$$R \otimes_K M \to M, \ a \otimes f \mapsto af$$

ein Homomorphismus von Λ-Moduln wird.

Anmerkung 1.4. Montgomery [49, Definition 4.1.1] nennt eine Λ-Algebra *Modul-Algebra*. Bezeichnet man das *Smash*-Produkt einer Λ-Algebra R und Λ mit $R\#\Lambda$ (siehe Montgomery [49, Definition 4.1.3]), so ist ein $(R\#\Lambda)$-Modul dasselbe wie ein Modul über $R\#\Lambda$.

Es seien R eine Algebra über einer Hopf-Algebra Λ und M ein $(R\#\Lambda)$-Modul. Dann ist R^Λ eine K-Unteralgebra von R, die wir auch **Invariantenring** nennen. Die Multiplikation mit einem $a \in R^\Lambda$ ergibt einen Λ-Endomorphismus von M. Dadurch werden M, M^Λ und auch alle $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ zu Moduln über R^Λ.

Beispiel 1.5. Das für uns wichtigste Beispiel einer Hopf-Algebra ist die Gruppenalgebra KG einer (beliebigen) Gruppe G. Hierfür sind die Komultiplikation und Koeinheit durch $\Delta(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$ und $\epsilon(\sigma) = 1$ für $\sigma \in G$ gegeben. $\Lambda = KG$ ist kokommutativ, und eine Antipode ist gegeben durch $\eta(\sigma) = \sigma^{-1}$ (siehe Benson [3, Definition 3.1.4 und 3.1.7]). Eine Λ-Algebra ist nichts anderes als eine K-Algebra mit einer Operation von G durch Automorphismen. Zu einem Λ-Modul V ist

$$V^\Lambda = V^G := \{v \in V \mid \sigma(v) = v \ \forall \sigma \in G\}.$$

Also ist $R^\Lambda = R^G$ der Invariantenring im herkömmlichen Sinn.

Wir spezialisieren die Situation noch weiter, indem wir K als einen Körper voraussetzen und zwei über K endlich dimensionale Λ-Moduln V und W wählen. Dann ist $R = S(V^*)$, die symmetrische Algebra des Duals von V, eine Noethersche Λ-Algebra, und $M = R \otimes_K W$ ist ein $(R\#\Lambda)$-Modul. G operiert auch auf dem K-Vektorraum $\operatorname{Fun}(V, W)$ der Funktionen $V \to W$ durch $\sigma(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$, und wir erhalten einen Homomorphismus von Λ-Moduln durch

$$M \to \operatorname{Fun}(V, W), \ l_1 \cdots l_r \otimes w \mapsto (v \mapsto l_1(v) \cdots l_r(v) \cdot w) \quad \text{für } l_1, \ldots, l_r \in V^*, \ w \in W.$$

Dieser ist injektiv, falls K unendlich ist. In diesem Fall liegt ein $f \in M$ genau dann in M^Λ, falls es auf eine G-kompatible Funktion abgebildet wird. Wir können M^Λ also als den Modul der **Äquivarianten** interpretieren.

Beispiel 1.6. Wir stellen einige weitere Beispiele für Hopf-Algebren zusammen.

(a) Es seien $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\Lambda := U(\mathfrak{g})$ die universell Einhüllende. Dann wird Λ zu einer kokommutativen Hopf-Algebra mit Antipode durch $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\epsilon(x) = 0$ und $\eta(x) = -x$ für $x \in \mathfrak{g}$ (siehe Montgomery [49, Example 1.3.3]). Die Definition von Δ bedeutet, daß $\mathfrak{g}$ auf einer Λ-Algebra durch Derivationen operiert. Die Modulkategorien von $\mathfrak{g}$ und von Λ sind äquivalent. Für einen Λ-Modul V ist

$$V^\Lambda = \{v \in V \mid xv = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

(b) Es sei Λ eine kommutative Hopf-Algebra mit Antipode. Dann läßt sich Λ interpretieren als der Koordinatenring eines affinen Gruppenschemas über K (siehe Waterhouse [73, Theorem 1.4]). In der Tat werden für $G := \mathrm{Spec}(\Lambda)$ durch die funktoriellen Morphismen $\Delta^*\colon G \times G \to G$ eine Multiplikation, durch $\epsilon^*\colon \mathrm{Spec}(K) \to G$ ein Einselement und durch $\eta^*\colon G \to G$ eine Inversenabbildung gegeben. Wir schreiben auch $\Lambda = K[G]$. Λ ist genau dann kokommutativ, falls G abelsch ist. Nach Hartshorne [27, Kap. I, Corollary 5.5] ist die Modulkategorie von Λ äquivalent zur Kategorie der quasi-kohärenten $\mathcal{O}_G$-Garben, wobei $\mathcal{O}_G$ die Strukturgarbe von G ist.

Eine besonders einfache Interpretation hat die Kategorie Λ-Moduln, falls G als endliche Gruppe vorgegeben ist, und K ein Körper ist. Wir setzen $\Lambda := \mathrm{Fun}(G, K)$, die Menge aller Funktionen von G nach K mit punktweise Addition und Multiplikation. Aus der Gruppenstruktur von G erhalten wir eine Struktur als Hopf-Algebra auf Λ. Es folgt $G = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ (als Mengen). Für $\sigma \in G$ bezeichnen wir die Abbildung $G \to K$, $\tau \mapsto \delta_{\sigma,\tau}$ mit $\delta_\sigma \in \Lambda$, wobei $\delta_{\sigma,\tau}$ das Kronecker-Symbol ist. Die $\delta_\sigma \in \Lambda$ sind orthogonale Idempotente. Es sei V ein Λ-Modul. Dann liefert $V_\sigma := \delta_\sigma \cdot V$ die Struktur

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G} V_\sigma$$

eines G-graduierten Vektorraums. Umgekehrt wird jeder G-graduierte R-Modul zu einem Λ-Modul, indem wir $f \cdot v = f(\sigma)v$ für $f \in \Lambda$ und $v \in V_\sigma$ setzen. Wir haben $V^\Lambda = V_1$ (siehe Cohen und Fishman [17]). Entsprechend sind die Λ-Algebren die G-graduierten Algebren.

(c) Über einem endlichen Körper $K = \mathbb{F}_q$ sei $\Lambda := \mathcal{P}^*$ die Steenrod-Algebra. Für die genaue Definition verweisen wir auf Smith [64, Abschnitt 11.1]. $\mathcal{P}^*$ wird erzeugt durch die Steenrod Operationen $\mathcal{P}^k$. Eine Struktur als kokommutative Hopf-Algebra wird gegeben durch $\Delta(\mathcal{P}^k) = \sum_{i=0}^k \mathcal{P}^i \otimes \mathcal{P}^{k-i}$ und $\epsilon(\mathcal{P}^k) = \delta_{k,0}$. Eine Λ-Algebra ist genau das, was Smith eine Algebra über der Steenrod-Algebra nennt.

Für den Rest des Abschnitts machen wir folgende Voraussetzungen:

Notation 1.7. Ab jetzt seien Λ eine Hopf-Algebra über einem Ring K, R eine Noethersche Λ-Algebra und M ein über R endlich erzeugter $(R\#\Lambda)$-Modul.

Ein Kriterium für reguläre Sequenzen. Wir stellen die Frage, unter welchen Bedingungen eine M-reguläre Sequenz mit Elementen aus R^Λ auch M^Λ-regulär ist. Um hierfür ein homologisches Kriterium angeben zu können, benötigen wir noch den **Koszul-Komplex** (siehe Eisenbud [18, Abschnitt 17]). Zu einer gegebenen Sequenz $a_1, \dots, a_k \in R$ hat dieser die Form

$$\mathcal{K}(a_1, \dots, a_k; M)\colon 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial_{k-1}} M^k \xrightarrow{\partial_{k-2}} M^{\binom{k}{k-2}} \xrightarrow{\partial_{k-3}} \quad \dots$$
$$\dots \quad \xrightarrow{\partial_3} M^{\binom{k}{3}} \xrightarrow{\partial_2} M^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\partial_1} M^k \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow M/(a_1, \dots, a_k)M \longrightarrow 0,$$

wobei M^k die direkte Summe von k Kopien von M bezeichnet. Ist $e_i\colon M \to M^k$ die i-te Einbettung, so ist ∂_0 gegeben durch $\partial_0(e_i(f)) = a_i f$. Sind weiter $e_{i,j}\colon M \to M^{\binom{k}{2}}$ die Einbettungen ($1 \leq i < j \leq k$), so ist $\partial_1(e_{i,j}(f)) = a_j e_i(f) - a_i e_j(f)$, und außerdem $\partial_{k-1}(f) = \varepsilon_1 a_1 e_1(f) + \cdots + \varepsilon_k a_k e_k(f)$ mit $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Die explizite Form der weiteren ∂_i braucht uns hier nicht zu interessieren. Die folgende Proposition ist Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen in diesem Abschnitt.

Proposition 1.8. *Unter den Voraussetzungen 1.7 sei $a_1, \ldots, a_m \in R^\Lambda$ eine M-reguläre Sequenz, und $E_k \subseteq M^{\binom{k}{2}}$ sei der Kern der Abbildung ∂_1 in $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_k; M)$. Dann ist $a_1, \ldots, a_m$ genau dann M^Λ-regulär, wenn $(a_1, \ldots, a_m)M^\Lambda \neq M^\Lambda$, und die Abbildungen*

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, E_k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda\left(K, M^{\binom{k}{2}}\right) \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

injektiv sind.

Beweis. Nach Eisenbud [18, Corollary 17.5] ist $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_k; M)$ exakt. Entsprechend ist $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_k; M^\Lambda)$ exakt, falls $a_1, \ldots, a_m$ eine M^Λ-reguläre Sequenz ist. Insbesondere ist dann das Zwischenstück

$$(M^\Lambda)^{\binom{k}{2}} \longrightarrow (M^\Lambda)^k \longrightarrow M^\Lambda \tag{1.2}$$

exakt. Umgekehrt gelte $(a_1, \ldots, a_m)M^\Lambda \neq M^\Lambda$, und (1.2) sei für $k = 1, \ldots, m$ exakt. Aus $a_k f_k \in M^\Lambda/(a_1, \ldots, a_{k-1})M^\Lambda$ für $f_k \in M^\Lambda$ folgt dann $\partial_0(e_1(f_1) + \cdots + e_k(f_k)) = 0$ mit $f_i \in M^\Lambda$, also existieren $f_{i,j} \in M^\Lambda$, so daß

$$e_1(f_1) + \cdots + e_k(f_k) = \partial_1\Big(\sum_{1 \leq i < j \leq k} e_{i,j}(f_{i,j})\Big) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \Big(a_j e_i(f_{i,j}) - a_i e_j(f_{i,j})\Big).$$

Die k-te Komponente liefert $f_k = -\sum_{i=1}^{k-1} a_i f_{i,k} \in (a_1, \ldots, a_{k-1})M^\Lambda$. Also ist die Multiplikation mit a_k auf $M^\Lambda/(a_1, \ldots, a_{k-1})M^\Lambda$ injektiv, und $a_1, \ldots, a_m$ ist M^Λ-regulär. Damit ist zu zeigen, daß (1.2) genau dann exakt ist, wenn alle Abbildungen (1.1) injektiv sind.

Wir schreiben $N_k \subseteq M^k$ für den Kern von $\partial_0\colon M^k \to M$ aus $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_k; M)$, und erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N_k^\Lambda \longrightarrow (M^\Lambda)^k \longrightarrow M^\Lambda.$$

Da N_k außerdem das Bild von $\partial_1\colon M^{\binom{k}{2}} \to M^k$ ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & N_k^\Lambda \arrow[dr] & & \\
(M^\Lambda)^{\binom{k}{2}} \arrow[ur] \arrow[rr] & & (M^\Lambda)^k \arrow[r] & M^\Lambda.
\end{tikzcd}$$

Damit ist (1.2) genau dann exakt, wenn $(M^\Lambda)^{\binom{k}{2}} \to N_k^\Lambda$ surjektiv ist. Die exakte Sequenz $0 \to E_k \to M^{\binom{k}{2}} \to N_k \to 0$ führt nach Benson [3, Proposition 2.5.3] zu der langen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow E_k^\Lambda \longrightarrow (M^\Lambda)^{\binom{k}{2}} \longrightarrow N_k^\Lambda \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, E_k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, M^{\binom{k}{2}}).$$

Diese liefert, daß (1.2) genau dann exakt ist, wenn (1.1) injektiv ist, wie behauptet. $\square$

Höhere Ext-Moduln. Die Abbildungen (1.1) aus Proposition 1.8 sind wenig zugänglich. Wir können jedoch unter zusätzlichen Voraussetzungen aus Proposition 1.8 ein brauchbares Kriterium gewinnen.

Satz 1.9. *Unter den Voraussetzungen 1.7 gelte für ein $r \geq 0$, daß $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(K, M) = 0$ für $0 < i < r$. (Diese Bedingung ist leer, falls $r \leq 1$.) Dann ist jede M-reguläre Sequenz $a_1, \ldots, a_m \in R^\Lambda$ der Länge $m \leq r+1$ mit $(a_1, \ldots, a_m)M^\Lambda \neq M^\Lambda$ auch M^Λ-regulär. Weiter ist eine M-reguläre Sequenz $a_1, \ldots, a_{r+2} \in R^\Lambda$ genau dann M^Λ-regulär, wenn $(a_1, \ldots, a_{r+2})M^\Lambda \neq M^\Lambda$ und die durch Multiplikation mit $a_1, \ldots, a_{r+2}$ induzierte Abbildung*

$$\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M^{r+2}) \tag{1.3}$$

injektiv ist.

Beweis. Es sei $a_1, \ldots, a_m \in R^\Lambda$ eine M-reguläre Sequenz mit $(a_1, \ldots, a_m)M^\Lambda \neq M^\Lambda$, $1 \leq m \leq r+2$. Wir behandeln zunächst einige Spezialfälle. Ist $m = 1$, so ist a_1 offensichtlich auch M^Λ-regulär. Ist $m = 2$, so sind die Moduln E_k aus Proposition 1.8 für $k \leq m$ Nullmoduln, also folgt die M^Λ-Regularität von a_1, a_2 aus Proposition 1.8. Sind $m = 2$ und $r = 0$, so ist die Abbildung (1.3) wegen der Linksexaktheit von $\operatorname{Hom}_\Lambda(K, \cdot)$ injektiv, also gilt Satz 1.9 in diesem Fall. Seien jetzt $m = 3$ und $r = 1$. Dann ist E_m das Bild von M unter $\partial_2 = \partial_{m-1}$, und damit sind die Abbildungen (1.1) und (1.3) bis auf Vorzeichen identisch. Dies reduziert Satz 1.9 auf Proposition 1.8.

Nach diesen Vorbereitungen können wir $r > 1$ annehmen. Dann ist nach Voraussetzung $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, M) = 0$, also sind die Abbildungen (1.1) genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_k) = 0$ für $1 \leq k \leq m$ gilt. Es ist also zu zeigen, daß $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m) = 0$ für $1 \leq m \leq r+1$ gilt, und $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_{r+2}) = 0$ genau dann, wenn (1.3) injektiv ist.

Wir zeigen zunächst

$$\operatorname{Ext}^k_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_k)) \cong \operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m)$$

für $1 \leq k \leq \min\{r-1, m-1\}$, wobei ∂_k aus $\mathcal{K}(a_1, \ldots, a_m; M)$ kommt. Für $k = 1$ gilt dies wegen $E_m = \operatorname{Kern}(\partial_1)$. Für $k > 1$ haben wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern}(\partial_k) \longrightarrow M^{\binom{m}{k+1}} \xrightarrow{\partial_k} \operatorname{Kern}(\partial_{k-1}) \longrightarrow 0$$

und daraus die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Ext}^{k-1}_\Lambda(K, M^{\binom{m}{k+1}}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{k-1}_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_{k-1})) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^k_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_k)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^k_\Lambda(K, M^{\binom{m}{k+1}}) = 0. \end{aligned}$$

Diese liefert die behauptete Isomorphie per Induktion nach k.

Für den Fall $m \leq r$ haben wir $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m) \cong \operatorname{Ext}^{m-1}_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_{m-1}))$ gezeigt, aber $\operatorname{Kern}(\partial_{m-1}) = 0$. Also gilt in diesem Fall $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m) = 0$, wie zu zeigen war. Für $m = r+1$ haben wir $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m) \cong \operatorname{Ext}^{r-1}_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_{m-2})) \cong \operatorname{Ext}^{r-1}_\Lambda(K, M) = 0$, wie behauptet. Sei schließlich $m = r+2$. Dann ist $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m) \cong \operatorname{Ext}^{r-1}_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_{m-3}))$, und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\partial_{m-1}} M^m \xrightarrow{\partial_{m-2}} \operatorname{Kern}(\partial_{m-3}) \longrightarrow 0$$

führt zu der langen exakten Sequenz

$$0 = \operatorname{Ext}^{r-1}_\Lambda(K, M^m) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{r-1}_\Lambda(K, \operatorname{Kern}(\partial_{m-3})) \longrightarrow \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M^m),$$

wobei φ bis auf Vorzeichen durch die Multiplikation mit $a_1, \ldots, a_m$ induziert wird. Also ist $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, E_m) = 0$ genau dann, wenn die Abbildung (1.3) injektiv ist, was zu zeigen war. □

Satz 1.9 wird durch das folgende Beispiel illustriert.

Beispiel 1.10. Es sei $G \neq \{0\}$ eine Untergruppe der additiven Gruppe K^+ von K. Wir betrachten die Operation von G auf dem Polynomring $R := K[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ durch

$$a(x_i) = x_i \quad \text{und} \quad a(y_i) = a \cdot x_i + y_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{für } a \in G.$$

Durch die Einbettung $\varphi \colon G \to K^+ \subset R^G$ wird ein Homomorphismus von G in die additive Gruppe von R^G gegeben, also ein Element $\alpha \in H^1(G, R)$ mit $\alpha \neq 0$. Es gilt jedoch

$$x_i \cdot \varphi(a) = a \cdot x_i = (a - 1)(y_i)$$

für $a \in G$, also ist $x_i \cdot \varphi$ ein 1-Korand, und es gilt $x_i \cdot \alpha = 0$. Die Multiplikation mit x_1, x_2, x_3 induziert also eine nicht-injektive Abbildung $H^1(G, R) \to H^1(G, R^3)$. Da x_1, x_2, x_3 offenbar eine R-reguläre Sequenz bilden, folgt aus Satz 1.9, daß x_1, x_2, x_3 nicht R^G-regulär ist. In der Tat liegen die Polynome $u_{i,j} := x_i y_j - x_j y_i$ in R^G, und die Relation

$$x_1 u_{2,3} + x_2 u_{3,1} + x_3 u_{1,2} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

zeigt, daß x_3 ein Nullteiler in $R^G/(x_1, x_2)R^G$ ist.

Durch konsequentes Nachvollziehen der Beweise zu Proposition 1.8 und Satz 1.9 gelangt man von dieser Relation direkt zu dem 1-Kozyklus α und seinen Annullatoren, und zurück. Tatsächlich war die Analyse dieses und ähnlicher Beispiele der Ausgangspunkt für die Untersuchungen dieses Abschnitts.

1.3 Endliche Erweiterungen

Falls R endlich erzeugt ist als R^Λ-Modul, so ist M auch ein endlicher Modul über R^Λ. Durch Anwendung von Proposition 1.2 erhalten wir in diesem Fall einige wichtige Konsequenzen aus Satz 1.9 und Proposition 1.8.

Korollar 1.11. *Unter den Voraussetzungen 1.7 sei zusätzlich R endlich erzeugt als R^Λ-Modul. Für ein $r \geq 0$ gelte $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(K, M) = 0$ für $0 < i < r$. Weiter seien $0 \neq \alpha \in \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ und $I = \operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(\alpha)$, und wir setzen $\operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(M^\Lambda) \subseteq \sqrt{I}$ und $\operatorname{depth}(I, M) \geq \min\{r + 2, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}$ voraus. Dann gilt*

$$\operatorname{depth}(I, M^\Lambda) = \min\{r + 1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}.$$

Anmerkung 1.12. Falls Λ endlich dimensional und kokommutativ ist, so folgt die Ganzheit von R über R^Λ (siehe Ferrer Santos [20], Montgomery [49, Theorem 4.2.1]). Ist R zusätzlich endlich erzeugt als R^Λ-Algebra, so folgt die in Korollar 1.11 verlangte endliche Erzeugung als R^Λ-Modul.

Beweis. Zunächst existiert eine M-reguläre Sequenz $a_1, \ldots, a_m \in I$ mit $m = \min\{r+1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}$. Nach Satz 1.9 ist $a_1, \ldots, a_m$ auch M^Λ-regulär, also

$$\operatorname{depth}(I, M^\Lambda) \geq \min\{r + 1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}.$$

Nun sei $a_1, \ldots, a_m \in I$ eine maximale Sequenz, die M-regulär und M^Λ-regulär ist. Nach Proposition 1.2(b) folgt $m \leq \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)$. Wegen $a_i \in \operatorname{Ann}(\alpha)$ ist die durch Multiplikation mit $a_1, \ldots, a_m$ induzierte Abbildung $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M) \to \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M^m)$ nicht injektiv, also $m < r + 2$ nach Satz 1.9. Wir erhalten also

$$m \leq \min\{r + 1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}.$$

Nach Eisenbud [18, Theorem 3.1] liegt jedes Element von I in einem assoziierten Primideal zu $M/(a_1, \ldots, a_m)M$ oder zu $M^\Lambda/(a_1, \ldots, a_m)M^\Lambda$, wegen des Primvermeidungslemmas („prime avoidance“, siehe Eisenbud [18, Lemma 3.3]) liegt also ganz I in einem solchen Primideal. Das bedeutet, daß $a_1, \dots, a_m \in I$ eine maximale M- oder M^Λ-reguläre Sequenz ist. Im ersten Fall erhalten wir die Ungleichungskette

$$\min\{r+2, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\} \leq \operatorname{depth}(I, M) = m \leq \min\{r+1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\},$$

also $m = \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)$. Nach Proposition 1.2(b) ist $a_1, \dots, a_m$ also auch maximale M^Λ-reguläre Sequenz in I. In jedem Fall erhalten wir also

$$\operatorname{depth}(I, M^\Lambda) = m \leq \min\{r+1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}.$$

Dies war noch zu zeigen. □

Erweiterungen mit Abstiegseigenschaft. Um weitere Folgerungen zu beweisen, benötigen wir Resultate zum Verhalten von Tiefe bei ganzen Erweiterungen. Eine Erweiterung $A \subseteq R$ von Ringen heißt **Erweiterung mit Abstiegseigenschaft**, falls R ganz ist über A und außerdem folgendes gilt: Zu Primidealen $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ und $P \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $P \subseteq Q$ existiert ein $Q' \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $A \cap Q' = P$ und $Q' \subseteq Q$. Die folgende Proposition enthält einige Beispiele von Erweiterungen mit Abstiegseigenschaft.

Proposition 1.13. *$A \subseteq R$ sei eine ganze Erweiterung von Ringen, und es gelte mindestens eine der folgenden Bedingungen:*

(a) R ist ein Integritätsbereich und A ist normal (d.h. ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper);

(b) R ist ein flacher A-Modul;

(c) es gibt eine endliche Gruppe G von Automorphismen von R, so daß $A = R^G$ ist.

Dann hat die Erweiterung $A \subseteq R$ die Abstiegseigenschaft.

Beweis. Die Behauptung unter der Voraussetzung (a) bzw. (b) findet sich in Eisenbud [18, Theorem 13.9 bzw. Lemma 10.11]. Es seien nun $A = R^G$, $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ und $P \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $P \subseteq Q$. Wegen des Aufstiegslemmas („going up“, siehe Eisenbud [18, Proposition 4.15]) existieren $Q', Q'' \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $A \cap Q' = P$, $A \cap Q'' = A \cap Q$ und $Q' \subseteq Q''$. Gemäß dem nachfolgendem Lemma 1.14 gilt $Q = \sigma(Q'')$ mit $\sigma \in G$, also hat $\sigma(Q')$ die gewünschten Eigenschaften. □

Lemma 1.14. *Es seien R ein Ring, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von R, $A = R^G$ und $P \in \operatorname{Spec}(A)$. Dann operiert G transitiv auf der Menge aller $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $A \cap Q = P$.*

Beweis. Es sei $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $A \cap Q = P$. Dann ist auch $A \cap \sigma(Q) = P$ für $\sigma \in G$. Sei umgekehrt $Q' \in \operatorname{Spec}(R)$ ein weiteres Primideal mit $A \cap Q' = P$. Dann gilt für $f \in Q'$

$$\prod_{\sigma \in G} \sigma(f) \in Q' \cap A \subseteq Q,$$

also $f \in \sigma(Q)$ für ein $\sigma \in G$. Damit liegt Q' in der Vereinigung aller $\sigma(Q)$, wegen des Primvermeidungslemmas also in einem der $\sigma(Q)$. Wegen der Unvergleichbarkeit von Primidealen über P (siehe Eisenbud [18, Corollary 4.18]) folgt $Q' = \sigma(Q)$ mit $\sigma \in G$. □

Proposition 1.15. *Es seien $A \subseteq R$ eine ganze Erweiterung von Noetherschen Ringen und $I \subsetneqq R$ ein Ideal. Dann gilt*

$$\dim(A/(A \cap I)) = \dim(R/I).$$

Hat die Erweiterung zusätzlich die Abstiegseigenschaft, so gilt

$$\operatorname{ht}(A \cap I) = \operatorname{ht}(I).$$

Beweis. Die erste Behauptung findet sich bei Eisenbud [18, Proposition 9.2]. Für den Beweis der zweiten Behauptung nehmen wir ein $P \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $A \cap I \subseteq P$. Wegen des Aufstiegslemmas existiert ein $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $A \cap Q = P$ mit $I \subseteq Q$. Wir wählen eine Kette

$$Q_0 \subsetneqq Q_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Q_r = Q$$

mit $Q_i \in \operatorname{Spec}(R)$ und $r = \operatorname{ht}(Q)$. Dann gilt wegen Eisenbud [18, Corollary 4.18]

$$A \cap Q_0 \subsetneqq A \cap Q_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq A \cap Q_r = P,$$

also $\operatorname{ht}(P) \geq \operatorname{ht}(Q) \geq \operatorname{ht}(I)$. Wegen der beliebigen Wahl von P folgt $\operatorname{ht}(A \cap I) \geq \operatorname{ht}(I)$. Sei umgekehrt $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $I \subseteq Q$. Wir setzen $P := A \cap Q$ und wählen eine Kette

$$P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq P_r = P$$

mit $P_i \in \operatorname{Spec}(A)$. Nach Voraussetzung lassen sich $Q_i \in \operatorname{Spec}(R)$ wählen mit $Q_r = Q$, $A \cap Q_i = P_i$ und $Q_i \subseteq Q_{i+1}$. Wir erhalten eine echt aufsteigende Kette, also $\operatorname{ht}(Q) \geq \operatorname{ht}(P) \geq \operatorname{ht}(A \cap I)$. Es folgt $\operatorname{ht}(I) \geq \operatorname{ht}(A \cap I)$. □

Beispiel 1.16. Die folgende ganze Ringerweiterung hat nicht die Abstiegseigenschaft. Es seien $K[x, y]$ ein Polynomring in zwei Unbestimmten über einem Körper K und $J := (x) \cap (x - 1, y) \subset K[x, y]$. Wir haben eine ganze Ringerweiterung $A := K[y] \subset R := K[x, y]/J$, aber für das Ideal $I := (x - 1, y) + J \subset R$ gilt $\operatorname{ht}(I) = 0$ und $\operatorname{ht}(A \cap I) = \operatorname{ht}((y)) = 1$.

Proposition 1.17. *Es seien $A \subseteq R$ Noethersche Ringe, so daß R endlich erzeugt als A-Modul ist, und M sei ein endlich erzeugter R-Modul. Dann existiert zu jedem maximalen Ideal $P \subset A$ aus $\operatorname{Supp}_A(M)$ ein maximales Ideal $Q \subset R$ aus $\operatorname{Supp}_R(M)$ mit $A \cap Q = P$, so daß*

$$\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}(Q, M).$$

Hat zusätzlich die Erweiterung $A/\operatorname{Ann}_A(M) \subseteq R/\operatorname{Ann}_R(M)$ die Abstiegseigenschaft, so ist M genau dann Cohen-Macaulay als R-Modul, wenn M Cohen-Macaulay als A-Modul ist.

Beweis. Sei $a_1, \ldots, a_m \in P$ eine maximale M-reguläre Sequenz. Dann liegt nach Eisenbud [18, Theorem 3.1] jedes Element von P in einem assoziierten Primideal aus $\operatorname{Ass}_R(M/(a_1, \ldots, a_m)M)$. Nach dem Primvermeidungslemma gibt es ein $Q \in \operatorname{Ass}_R(M/(a_1, \ldots, a_m)M)$ mit $P \subseteq Q$. Als Annullator eines Elements von $M/(a_1, \ldots, a_m)M$ liegt Q auch in $\operatorname{Supp}_R(M)$. Da P maximal ist, gilt $P = Q \cap A$, und auch $P = Q' \cap A$ für jedes echte Ideal $Q' \supseteq Q$. Wegen der Unvergleichbarkeit von Primidealen über P (Eisenbud [18, Corollary 4.18]) folgt also, daß Q maximal ist. Wegen $Q \in \operatorname{Ass}_R(M/(a_1, \ldots, a_m)M)$ ist $a_1, \ldots, a_m$ auch eine maximale M-reguläre Sequenz in Q. Mit Proposition 1.2(a) folgt

$$\operatorname{depth}(P, M) = m = \operatorname{depth}(Q, M).$$

Nun habe $A/\operatorname{Ann}_A(M) \subseteq R/\operatorname{Ann}_R(M)$ die Abstiegseigenschaft. Dann gilt $\dim(M_P) = \dim(M_Q)$ wegen Proposition 1.15. Falls M Cohen-Macaulay über R ist, so folgt $\operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}(Q, M) = \dim(M_Q) = \dim(M_P)$, also ist M auch Cohen-Macaulay über A. Sind umgekehrt M Cohen-Macaulay über A und $Q \in \operatorname{Supp}_R(M)$ ein maximales Ideal, so setzen wir $P = A \cap Q$. Nach Proposition 1.15 folgt $\dim(M_P) = \dim(M_Q)$, also nach Voraussetzung $\dim(M_Q) = \operatorname{depth}(P, M) \leq \operatorname{depth}(Q, M) = \operatorname{depth}(M_Q) \leq \dim(M_Q)$. Damit ist M auch Cohen-Macaulay als R-Modul. □

Wir ziehen eine weitere wichtige Folgerung aus Satz 1.9.

Korollar 1.18. *Unter den Voraussetzungen 1.7 seien zusätzlich M und M^Λ Cohen-Macaulay (über R bzw. R^Λ), R sei endlich erzeugt als R^Λ-Modul, und $R^\Lambda/\operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(M) \subseteq R/\operatorname{Ann}_R(M)$ sei eine Erweiterung mit Abstiegseigenschaft. Für ein $r \geq 0$ gelte $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(K, M) = 0$ für $0 < i < r$ (diese Bedingung ist leer, falls $r \leq 1$), und es seien $\alpha \in \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ und $I = \operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(\alpha)$. Dann gilt für alle $P \in \operatorname{Ass}_{R^\Lambda}(I) \cap \operatorname{Supp}_{R^\Lambda}(M^\Lambda)$*

$$\operatorname{ht}(P, M^\Lambda) \leq r + 1.$$

Beweis. P ist der Annullator eines Elements von R^Λ/I, also existiert ein $y \in R^\Lambda$, für das

$$P = \{x \in R^\Lambda \mid xy \in I\} = \operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(y\alpha)$$

gilt. P erfüllt also die Voraussetzungen des Korollars. Wir müssen daher nur $\operatorname{ht}(I, M^\Lambda) \leq r + 1$ zeigen und können $\operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(M^\Lambda) \subseteq I \subsetneqq R^\Lambda$, also $\alpha \neq 0$ annehmen.

Wegen Proposition 1.17 ist M auch Cohen-Macaulay über R^Λ. Mit Proposition 1.2(c) folgt also $\operatorname{depth}(I, M) = \operatorname{ht}(I, M)$, und $\operatorname{ht}(I, M) \geq \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)$, da $\operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(M) \subseteq \operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(M^\Lambda)$. Korollar 1.11 ist also anwendbar, und wir erhalten $\operatorname{depth}(I, M^\Lambda) = \min\{r+1, \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)\}$. Die Behauptung folgt, da nach Proposition 1.2(c) $\operatorname{depth}(I, M^\Lambda) = \operatorname{ht}(I, M^\Lambda)$ gilt. □

Anmerkung 1.19. Aus dem Beweis geht hervor, daß wir Korollar 1.18 auch ohne Verlust an Information wie folgt hätten formulieren können:
(1.18*) *Unter den Voraussetzungen 1.7 seien zusätzlich M und M^Λ Cohen-Macaulay (über R bzw. R^Λ), R sei endlich erzeugt als R^Λ-Modul, und $R^\Lambda/\operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(M) \subseteq R/\operatorname{Ann}_R(M)$ sei eine Erweiterung mit Abstiegseigenschaft. Für ein $r \geq 0$ gelte $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(K, M) = 0$ für $0 < i < r$. Dann gilt*

$$\operatorname{ht}(P, M^\Lambda) \leq r + 1 \quad \textit{für alle} \quad P \in \operatorname{Ass}_{R^\Lambda}(\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)) \cap \operatorname{Supp}_{R^\Lambda}(M^\Lambda).$$

Da wir jedoch im folgenden mit konkret gegebenen Elementen aus $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ arbeiten werden, ist die erste Formulierung günstiger.

Beispiel 1.20. In Beispiel 1.10 sei G endlich (was $\operatorname{char}(K) > 0$ impliziert). Dann ist R endlich erzeugt als R^G-Modul, und die Erweiterung $R^G \subseteq R$ hat nach Proposition 1.13 die Abstiegseigenschaft. Wäre R^G Cohen-Macaulay, so dürfte nach Korollar 1.18 der Annullator $\operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha)$ des in Beispiel 1.10 angegebenen $\alpha \in H^1(G, R)$ höchstens die Höhe 2 haben. Aber $x_1, x_2, x_3 \in \operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha)$, also ist die Höhe nach Proposition 1.15 mindestens 3. Es folgt, daß der Invariantenring R^G nicht Cohen-Macaulay ist. Dies wird sich als Spezialfall von Korollar 3.7 und gleichzeitig von Korollar 4.11 herausstellen.

Stark p-eingebettete Untergruppen. Sind $G \leq \operatorname{GL}(V)$ eine endliche lineare Gruppe über einem Körper K und H eine Untergruppe mit $[G : H] \in K^\times$, so gilt nach Kemper [35] $\operatorname{depth}(S(V)^G) \geq \operatorname{depth}(S(V)^H)$, wobei die Invariantenringe graduierte Unteralgebren der Polynomalgebra $S(V)$ mit $S(V)_1 = V$ sind. Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung.

Proposition 1.21. *Eine endliche Gruppe G operiere durch Automorphismen auf einem Ring R und auf einem endlich erzeugten R-Modul M, so daß $\sigma(af) = \sigma(a)\sigma(f)$ für $\sigma \in G$, $a \in R$ und $f \in M$ gilt. R sei endlich erzeugt über R^G, und R^G sei Noethersch. Weiter seien $H \leq G$ eine Untergruppe, so daß der Index $[G : H]$ in R invertierbar ist, und $P \subset R^G$ ein maximales Ideal mit $P \in \operatorname{Supp}_{R^G}(M^G)$. Dann existiert ein maximales Ideal $Q \subset R^H$ aus $\operatorname{Supp}_{R^H}(M^H)$ mit $R^G \cap Q = P$, so daß*

$$\operatorname{depth}(P, M^G) \geq \operatorname{depth}(Q, M^H)$$

gilt.

Falls R^H Cohen-Macaulay ist und die Erweiterung $R^G \subseteq R^H$ die Abstiegseigenschaft hat, so ist auch R^G Cohen-Macaulay.

Beweis. Es gilt $\operatorname{Ann}_{R^G}(M^H) \subseteq \operatorname{Ann}_{R^G}(M^G) \subseteq P$, nach Proposition 1.17 existiert also ein maximales Ideal $Q \subset R^H$ aus $\operatorname{Supp}_{R^H}(M^H)$ mit $R^G \cap Q = P$, so daß

$$\operatorname{depth}(P, M^H) = \operatorname{depth}(Q, M^H) =: r.$$

Es sei $a_1, \ldots, a_r \in P$ eine M^H-reguläre Sequenz. Wir behaupten, daß diese dann auch M^G-regulär ist. Zunächst gilt $PM^G \neq M^G$ wegen $P \in \operatorname{Supp}_{R^G}(M^G)$, also $(a_1, \ldots, a_r)M^G \neq M^G$. Es sei für ein $i \leq r$

$$a_1 f_1 + \cdots + a_i f_i = 0$$

mit $f_1, \dots, f_i \in M^G$. Wegen der M^H-Regularität existieren $g_1, \dots, g_{i-1} \in M^H$, so daß

$$f_i = a_1 g_1 + \cdots + a_{i-1} g_{i-1}. \tag{1.5}$$

Der relative Reynolds-Operator ist definiert durch

$$\pi_{G/H}\colon M^H \to M^G,\ f \mapsto \frac{1}{[G:H]} \cdot \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(f),$$

wobei die σ_i ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von H in G bilden. Da $\pi_{G/H}$ ein Homomorphismus von R^G-Moduln mit $\pi_{G/H}|_{M^G} = \mathrm{id}$ ist, ergibt die Anwendung auf (1.5)

$$f_i = a_1 \pi_{G/H}(g_1) + \cdots + a_{i-1} \pi_{G/H}(g_{i-1}) \in (a_1, \dots, a_{i-1}) M^G.$$

Damit ist $a_1, \dots, a_r$ M^G-regulär, und die erste Behauptung folgt.

Nun sei R^H Cohen-Macaulay, und $R^G \subseteq R^H$ habe die Abstiegseigenschaft. Für ein maximales Ideal $P \subset R^G$ nehmen wir das obige Ideal $Q \subset R^H$ und erhalten

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(Q) = \mathrm{depth}(Q, M^H) \le \mathrm{depth}(P, M^G) \le \mathrm{ht}(P),$$

also die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von R^G. □

Nun stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Umkehrung von Proposition 1.21 gilt, wann also aus der Cohen-Macaulay-Eigenschaft von R^G die von R^H folgt. Im allgemeinen ist dies falsch, wie das Beispiel $G = S_p$, $p \ge 5$, mit der Operation auf dem Polynomring $R = \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_p]$ durch Vertauschungen der x_i zeigt: R^G wird von den elementarsymmetrischen Polynomen erzeugt, ist also Cohen-Macaulay, aber die p-Sylowgruppe H ist zyklisch, und wir erhalten nach Ellingsrud und Skjelbred [19] $\mathrm{depth}(R^H) = 3 < p$ (siehe die Gleichung (4.6) auf S. 47), also ist R^H nicht Cohen-Macaulay. Wir benutzen nun Proposition 1.8, um von einer bestimmten Klasse von Untergruppen H zu zeigen, daß in Proposition 1.21 Gleichheit für die Tiefen gilt. $H \le G$ heißt **stark R-eingebettet** (siehe Thévenaz [72, p. 440]), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Der Index $[G : H]$ ist in R invertierbar;

(ii) für $\sigma \in G \setminus H$ hat der Schnitt ${}^{\sigma}H \cap H$ eine in R invertierbare Ordnung, wobei ${}^{\sigma}H := \sigma H \sigma^{-1}$.

Falls R die Charakteristik p hat, so sagen wir auch, daß H **stark p-eingebettet** ist. Ein typisches Beispiel ist der Normalisator einer p-Sylowgruppe P, falls diese die Ordnung p hat. Das folgende Lemma ist wohlbekannt, aber wegen fehlender Referenz in der Literatur wird hier ein Beweis gegeben, der von Jacques Thévenaz stammt.

Lemma 1.22. *Eine endliche Gruppe G operiere durch Automorphismen auf einem Ring R, und $H \le G$ sei stark R-eingebettet. Für einen Modul M über dem Gruppenring $R^G G$ ist dann die Restriktionsabbildung*

$$\mathrm{res}_{G,H} : H^i(G, M) \to H^i(H, M)$$

für $i > 0$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten die Korestriktion $\mathrm{cores}_{H,G}\colon H^i(H, M) \to H^i(G, M)$ (siehe Benson [3, S. 67]). Nach Benson [3, Proposition 3.6.17] gilt

$$\mathrm{cores}_{H,G} \circ \mathrm{res}_{G,H} = [G : H] \cdot \mathrm{id},$$

wegen der Bedingung (i) ist $\mathrm{res}_{G/H}$ also injektiv. Umgekehrt ergibt die Formel von Mackey (siehe Benson [3, Lemma 3.6.16]) für $\alpha \in H^i(H, M)$

$$\mathrm{res}_{G,H}\,\mathrm{cores}_{H,G}(\alpha) = \sum_{\sigma \in H \setminus G / H} \mathrm{cores}_{{}^{\sigma}H \cap H, H}\,\mathrm{res}_{H, {}^{\sigma}H \cap H}(\sigma\alpha),$$

wobei die Summation über Vertreter σ der Doppelnebenklassen $H\sigma H$ läuft. Wegen (ii) gilt $H^i({}^\sigma H \cap H, M) = 0$ für $\sigma \notin H$, also liefert die obige Gleichung $\mathrm{res}_{G,H}\,\mathrm{cores}_{H,G}(\alpha) = \alpha$, und die Surjektivität folgt. □

Satz 1.23. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 1.21 sei H zusätzlich R-stark eingebettet. Dann gilt für jedes Ideal $I \subsetneqq R^G$ mit $\mathrm{Ann}_{R^G}(M^H) \subseteq \sqrt{I}$ und für jedes Ideal $J \subsetneqq R^H$ mit $I \subseteq J$*

$$\mathrm{depth}(I, M^G) \le \mathrm{depth}(J, M^H).$$

Hat die Erweiterung $R^G \subseteq R^H$ außerdem die Abstiegseigenschaft, so ist R^H genau dann Cohen-Macaulay, wenn dies für R^G gilt.

Beweis. Es sei $a_1, \ldots, a_m \in I$ eine M^G-reguläre Sequenz mit $m = \mathrm{depth}(I, M^G)$. Wir haben $IM^H \ne M^H$ und damit auch $(a_1, \ldots, a_m)M^H \ne M^H$. Nach Proposition 1.8 ist $a_1, \ldots, a_m$ genau dann M^H-regulär, wenn die dortigen Abbildungen $H^1(H, E_k) \to H^1(H, M^{\binom{k}{2}})$ für $k = 1, \ldots, m$ injektiv sind. Wegen Lemma 1.22 haben wir aber kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(G, E_k) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(G, M^{\binom{k}{2}}) \arrow[d, "\wr"] \\ H^1(H, E_k) \arrow[r] & H^1(H, M^{\binom{k}{2}}). \end{tikzcd}$$

Die obere Zeile ist nach Voraussetzung und Proposition 1.8 injektiv, also auch die untere.

Es gelte nun die Abstiegseigenschaft, und R^G sei Cohen-Macaulay. Für ein maximales Ideal $Q \subset R^H$ sei $I := R^G \cap Q$. Mit obigem und den Propositionen 1.2 folgt und 1.15

$$\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(I) = \mathrm{depth}(I, R^G) \le \mathrm{depth}(Q, R^H) \le \mathrm{ht}(Q),$$

also Gleichheit. Damit ist auch R^H Cohen-Macaulay. Die Umkehrung gilt nach Proposition 1.21. □

Beispiel 1.24. Es seien p eine Primzahl und $G = S_p$ die symmetrische Gruppe auf p Symbolen. Für eine p-Sylowgruppe $P \cong Z_p$ ist der Normalisator $H = \mathcal{N}_G(P) \cong Z_p \rtimes Z_{p-1}$ stark p-eingebettet. Der Invariantenring R^G unter der natürlichen G-Operation auf dem Polynomring $R = \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_p]$ durch Permutationen der x_i ist isomorph zu einer Polynomalgebra, erzeugt von den elementarsymmetrischen Polynomen, insbesondere also Cohen-Macaulay. Nach Satz 1.23 folgt, daß auch R^H Cohen-Macaulay ist. Dies mag überraschend sein, da der Invariantenring R^P für $p \ge 5$ nicht Cohen-Macaulay ist, wie wir oben bemerkt haben.

2 Reduktive Gruppen und Hopf-Algebren

Wir machen in diesem Abschnitt die folgenden Voraussetzungen:

Notation 2.1. Λ sei eine kokommutative Hopf-Algebra mit Antipode über einem Körper K. Weiter sei $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie der Λ-Moduln mit folgenden Eigenschaften:

(i) K liegt in $\mathcal{C}$;

(ii) alle V aus $\mathcal{C}$ sind endlich dimensional als K-Vektorräume;

(iii) mit V liegt auch jeder Untermodul und jede symmetrische Potenz $S^r(V)$ in $\mathcal{C}$;

(iv) mit V und W liegen auch $V \oplus W$ und $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ in $\mathcal{C}$.

Alle Tensorprodukte und symmetrische Potenzen werden über K gebildet. Man beachte, daß wegen der Kokommutativität die Λ-Operation auf einer Tensorpotenz eine Operation auf der symmetrischen Potenz induziert, und daß $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit Hilfe der Antipode zum Λ-Modul wird (siehe Benson [3, S. 48]).

Für jede Hopf-Algebra erfüllt die Kategorie aller endlich dimensionalen Moduln die Voraussetzungen (i)–(iv).

2.1 Lineare und geometrische Reduktivität

Definition 2.2. *Unter den Voraussetzungen 2.1 heißt Λ* **linear reduktiv** *(oder auch* **halbeinfach***) bezüglich $\mathcal{C}$, falls jeder Modul aus $\mathcal{C}$ voll reduzibel ist. Λ heißt* **geometrisch reduktiv** *bezüglich $\mathcal{C}$, falls zu jedem Modul V aus $\mathcal{C}$ und zu jedem $0 \neq v \in V^\Lambda$ ein $r > 0$ und ein $f \in S^r(V^*)^\Lambda$ existiert mit $f(v) \neq 0$.*

Beispiel 2.3. Es sei G eine lineare algebraische Gruppe über K, der als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt werde. $\Lambda = KG$ sei der Gruppenring, und $\mathcal{C}$ sei die Kategorie aller endlich dimensionalen Λ-Moduln V, so daß die zugehörige Abbildung $G \to \mathrm{GL}(V)$ ein Morphismus von algebraischen Gruppen ist. Dann erfüllt $\mathcal{C}$ die Bedingungen aus 2.1. Λ ist genau dann linear- bzw. geometrisch reduktiv, wenn die entsprechende Eigenschaft für G gilt (siehe Mumford et al. [50, S. 191]).

Einige weitere wichtige Klassen kokommutativer Hopf-Algebren mit Antipode wurden in Beispiel 1.6(a) und (b) angegeben. Wir werden in Abschnitt 2.3 untersuchen, was lineare bzw. geometrische Reduktivität für diese Klassen bedeuten.

Proposition 2.4. *(a) Ist Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$, so auch geometrisch reduktiv.*

(b) Ist Λ endlich dimensional, so ist Λ geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$.

Beweis. Λ sei linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$, und V sei ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$. Wir rechnen zunächst nach, daß die Auswertung bei einem $v \in V^\Lambda$ ein Λ-Homomorphismus φ: $V^* \to K$ ist. Dabei wird die Regel $\epsilon \circ \eta = \epsilon$ (Sweedler [71, Proposition 4.0.1(3)]; ϵ ist die Koeinheit und η die Antipode) benutzt. Nun sei $U \leq V^*$ ein irreduzibler Untermodul. Dann impliziert $\varphi(U) \neq 0$, daß $U \cong K$ ist. Aus der vollständigen Reduzibilität von V^* folgt damit $\varphi(V^*) = \varphi((V^*)^\Lambda)$. Falls $v \neq 0$ ist, gilt jedoch $\varphi(V^*) \neq 0$, also existiert $f \in (V^*)^\Lambda$ mit $f(v) \neq 0$. Damit ist (a) bewiesen.

Nun sei Λ endlich dimensional. Für $0 \neq v \in V^\Lambda$ existiert ein $f \in V^*$ mit $f(v) = 1$. Die symmetrische Algebra $S(V^*)$ ist ganz über $S(V^*)^\Lambda$ (siehe Anmerkung 1.12), also existieren $a_1, \ldots, a_r \in S(V^*)^\Lambda$ mit

$$f^r + a_1 f^{r-1} + \cdots + a_{r-1} f + a_r = 0.$$

Ohne Einschränkung können wir $a_i \in S^i(V^*)^\Lambda$ annehmen. Auswertung bei v liefert

$$1 + a_1(v) + \cdots + a_{r-1}(v) + a_r(v) = 0,$$

also muß $a_i(v) \neq 0$ für mindestens ein i gelten. Dies zeigt Teil (b). $\square$

Der Reynolds-Operator. Zu einem Λ-Modul V aus $\mathcal{C}$ betrachten wir nun die symmetrische Algebra $S(V)$. Diese ist eine Λ-Algebra, und es braucht uns nicht zu stören, daß $S(V)$ nicht mehr in $\mathcal{C}$ liegt.

Proposition 2.5. *Es seien Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$, V ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$ und $R = S(V)$ die symmetrische Algebra. Dann existiert ein Λ-Epimorphismus*

$$\pi \colon R \to R^\Lambda$$

mit $\pi|_{R^\Lambda} = \mathrm{id}$. Jedes solche π ist auch ein Homomorphismus von R^Λ-Moduln.

Anmerkung. Ein Homomorphismus π mit den Eigenschaften aus Proposition 2.5 heißt **Reynolds-Operator**.

Beweis. Wegen der vollständigen Reduzibilität der symmetrischen Potenzen $S^r(V)$ existieren Abbildungen $\pi_r \colon S^r(V) \to S^r(V)^\Lambda$ mit den gewünschten Eigenschaften. Diese setzten wir zusammen und erhalten daraus π. Es sei nun $a \in R^\Lambda$. Dann wird durch $f \mapsto \pi(af)$ ein Λ-Endomorphismus φ auf R gegeben. Für einen irreduziblen Unterraum $U \subseteq R$ kann $\varphi(U) \neq 0$ nur gelten, wenn $U \cong K$. Für $f \in S^r(V)$ sei $f' = f - \pi(f)$. Dann folgt aus der vollständigen Reduzibilität $\varphi(f') = 0$, also

$$\pi(af) = \varphi(\pi(f) + f') = \varphi(\pi(f)) = \pi(a\pi(f)) = a\pi(f).$$

Damit ist π auf jedem Teilraum $S^r(V)$ ein R^Λ-Homomorphismus, also auf ganz R. □

Beispiel 2.6. Ist $\Lambda = KG$ mit einer endlichen Gruppe G, so daß $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$, so ist der Reynolds-Operator eindeutig bestimmt und durch

$$\pi(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(f)$$

gegeben.

Lemma 2.7. *In der Situation von Proposition 2.5 sei $I \subseteq R^\Lambda$ ein Ideal und IR das davon erzeugte Ideal in R. Dann gilt*

$$IR \cap R^\Lambda = I.$$

Beweis. Die Inklusion $I \subseteq IR \cap R^\Lambda$ ist klar. Sei umgekehrt $f = a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r \in IR \cap R^\Lambda$ mit $a_i \in R$ und $b_i \in I$. Wir wenden π aus Proposition 2.5 an und erhalten

$$f = \pi(f) = \pi(a_1) b_1 + \cdots + \pi(a_r) b_r \in I.$$

□

Mit Theorem 6.5.2 aus Bruns und Herzog [11] folgt nun, daß der Satz von Hochster und Roberts [29] auch in unserer verallgemeinerten Situation gilt:

Satz 2.8. *Unter den Voraussetzungen 2.1 seien V ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$ und $R = S(V)$ die symmetrische Algebra. Falls Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$ ist, so ist R^Λ Cohen-Macaulay.*

Beweis. R^Λ ist eine graduierte Unteralgebra von R. Daher ist der klassische Hilbertsche Beweis der endlichen Erzeugung von Invariantenringen linear reduktiver Gruppen anwendbar (siehe z.B. den Beweis zu Theorem 2.1.3 in Sturmfels [70]), also ist R^Λ endlich erzeugt. Wegen Lemma 2.7 folgt nun aus Bruns und Herzog [11, Theorem 6.5.2] die Behauptung □

Die geometrische Rückschnitteigenschaft. Der Beweis von Satz 2.8 zeigt die große Bedeutung von Lemma 2.7. Wir wollen nun ein ähnliches Resultat für geometrisch reduktive Hopf-Algebren herleiten. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.9. *Es sei $\varphi\colon A \to B$ ein Epimorphismus von Λ-Algebren (nicht notwendig mit Eins), so daß jedes $a \in A$ in einem Untermodul enthalten ist, der in $\mathcal{C}$ liegt. Außerdem sei Λ geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$. Dann gibt es für jedes $b \in B^\Lambda$ ein $a \in A^\Lambda$ und ein $r > 0$ mit $\varphi(a) = b^r$.*

Beweis. Wir bilden den Beweis von Mumford et al. [50, Lemma A.1.2] nach. Ohne Einschränkung sei $b \neq 0$. Wir wählen $a' \in A$ mit $\varphi(a') = b$ und einen Untermodul $E \subseteq A$ in $\mathcal{C}$ mit $a' \in E$. Aus $b \in B^\Lambda$ folgt

$$\lambda a' \in \epsilon(\lambda)a' + (E \cap \mathrm{Kern}(\varphi)) \quad \text{für } \lambda \in \Lambda,$$

also ist auch $V := Ka' \oplus (E \cap \mathrm{Kern}(\varphi)) \subseteq E$ ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$. Es existiert ein $f \in V^*$ mit $f(a') = 1$ und $f|_{E\cap\mathrm{Kern}(\varphi)} = 0$. Für $\lambda \in \Lambda$ mit $\Delta(\lambda) = \sum_i \mu_i \otimes \nu_i$, $\alpha \in K$ und $v \in E \cap \mathrm{Kern}(\varphi)$ gilt

$$(\lambda f)(\alpha a' + v) = \sum_i \mu_i \cdot f\left(\eta(\nu_i) \cdot (\alpha a' + v)\right) =$$
$$= \sum_i \epsilon(\mu_i) \cdot f\left(\epsilon(\nu_i)\alpha a'\right) = \epsilon(\lambda)\alpha = (\epsilon(\lambda) \cdot f)(\alpha a' + v),$$

also $f \in (V^*)^\Lambda$. Wegen der geometrischen Reduktivität existieren ein $r > 0$ und ein $\widetilde{a} \in S^r(V^{**})^\Lambda$ mit $\widetilde{a}(f) = 1$. Unter Benutzung von (3), (4) und (6) aus Sweedler [71, Proposition 4.0.1] rechnet man nun nach, daß die kanonische Einbettung $V \to V^{**}$ ein Λ-Homomorphismus ist, wegen der endlichen Dimension von V können wir also $\widetilde{a} \in S^r(V)$ annehmen. Die Inklusion $V \subseteq A$ induziert einen Λ-Homomorphismus $\psi\colon S^r(V) \to A$. Das Bild von ψ ist die direkte Summe von $K \cdot (a')^r$ und einem K-Vektorraum, dessen Elemente alle Vielfache von Elementen aus $E \cap \mathrm{Kern}(\varphi)$ sind. Daraus ergibt sich

$$\varphi(\psi(\widetilde{a})) = b^r,$$

also leistet $a := \psi(\widetilde{a})$ das Gewünschte. □

Es folgt die angekündigte Abschwächung von Lemma 2.7, die für geometrisch reduktive Hopf-Algebren gilt.

Proposition 2.10. *Es seien V ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$, $R = S(V)$ die symmetrische Algebra und $I \subseteq R^\Lambda$ ein Ideal. Ist Λ geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$, so gilt*

$$\sqrt{IR} \cap R^\Lambda = \sqrt{I}.$$

Anmerkung. Für den Fall, daß Λ die Gruppenalgebra einer geometrisch reduktiven Gruppe ist, ist Proposition 2.10 in Newstead [56, Lemma 3.4.2] enthalten.

Beweis. Offenbar liegt $\sqrt{I}$ in $\sqrt{IR} \cap R^\Lambda$. Für die umgekehrte Inklusion genügt es zu zeigen, daß

$$IR \cap R^\Lambda \subseteq \sqrt{I}$$

gilt. Es sei also $f = \sum_{i=1}^m a_i f_i \in IR \cap R^\Lambda$ mit $a_i \in R$, $f_i \in I$. Sei $A := R[t_1, \dots, t_m]_+$ die Algebra aller Polynome in Unbestimmten $t_1, \dots, t_m$ mit Koeffizienten in R und 0 als konstantem Koeffizient. Mit trivialer Operation auf den t_i wird A zur Λ-Algebra (ohne Eins), und jedes Element aus A liegt in einem Untermodul in $\mathcal{C}$. Durch $at_i \mapsto af_i$ für $a \in R$ wird ein Homomorphismus $\varphi\colon A \to R$ von Λ-Algebren gegeben, dessen Bild wir mit B bezeichnen. Es gelten $f \in B^\Lambda$ und $\varphi(A^\Lambda) = \varphi(R^\Lambda[t_1, \dots, t_m]_+) \subseteq I$. Nach Lemma 2.9 folgt $f^r \in I$ für ein $r > 0$. □

Wir geben nun eine homologische Charakterisierung von linear reduktiven Hopf-Algebren. Sind U und V Λ-Moduln in $\mathcal{C}$, so schreiben wir $\mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(U,V)$ für die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow U \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

mit W in $\mathcal{C}$ (siehe Eisenbud [18, S. 645]). Da $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie ist, erhalten wir eine Einbettung $\mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(U,V) \hookrightarrow \text{Ext}^1_\Lambda(U,V)$. Ist nämlich $\alpha \in \mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(U,V)$ durch eine Erweiterung (2.1) gegeben, welche in der vollen Modulkategorie zerfällt, so liegt der entsprechende Homomorphismus $U \to W$ auch in $\text{Mor}_\mathcal{C}(U,W)$, also zerfällt (2.1) auch in $\mathcal{C}$, und $\alpha = 0$.

Proposition 2.11. *Λ ist genau dann linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$, falls $\mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(K,V) = 0$ für alle Λ-Moduln V in $\mathcal{C}$ gilt.*

Beweis. Falls Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$ ist, so zerfällt jede exakte Sequenz (2.1), insbesondere für $U = K$, also $\mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(K,V) = 0$.

Umgekehrt gelte $\mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(K,V) = 0$ für alle Λ-Moduln V in $\mathcal{C}$. Wir zeigen zunächst, daß für jeden Epimorphismus $U \to V$ von Λ-Moduln aus $\mathcal{C}$ auch $U^\Lambda \to V^\Lambda$ surjektiv ist. Es sei nämlich $0 \neq v \in V^\Lambda$ und $U' \subseteq U$ die Urbildmenge von Kv. Dann ist U' ein Untermodul, und der Epimorphismus $U' \to Kv \cong K$ zerfällt nach Voraussetzung. Dies liefert das gewünschte Urbild von v. Sei nun (2.1) irgendeine kurze exakte Sequenz von Λ-Moduln in $\mathcal{C}$. Daraus erhalten wir (da Sequenzen von K-Vektorräumen immer zerfallen) eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_K(U,V) \longrightarrow \text{Hom}_K(W,V) \longrightarrow \text{Hom}_K(V,V) \longrightarrow 0.$$

Nach Obigem existiert ein Urbild $\varphi \in \text{Hom}_K(W,V)^\Lambda$ von $\text{id}_V \in \text{Hom}_K(V,V)^\Lambda$. Nach Benson [3, S. 48] liegt φ in $\text{Hom}_\Lambda(W,V)$ und läßt (2.1) zerfallen. Also ist Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$. □

Für den Fall $\Lambda = KG$ gehört Proposition 2.11 vermutlich zur „Folklore“. Beispielsweise erscheint das Resultat im Beweis zu Proposition 1 bei Kraft und Kutzschenbauch [47]. Ich danke Hanspeter Kraft für eine Vereinfachung einer früheren Version des Beweises von Proposition 2.11.

2.2 Der Charakterisierungssatz

Um Satz 1.9 anwenden zu können, müssen wir Invarianten a_i produzieren, die Elemente aus $\text{Ext}^r_\Lambda(K,M)$ annullieren. Das folgende Lemma, das bisher nicht bekannt gewesen zu sein scheint, liefert den Schlüssel hierzu.

Lemma 2.12. *Es seien V ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$ und $\alpha \in \mathcal{C}\text{-Ext}^1_\Lambda(K,V)$. Dann existiert ein Λ-Modul W in $\mathcal{C}$ und ein $0 \neq w \in W^\Lambda$, so daß $w \otimes \alpha = 0$ als Element von $\text{Ext}^1_\Lambda(K, W \otimes V)$.*

Genauer gilt: Ein Λ-Modul W enthält genau dann ein $0 \neq w \in W^\Lambda$ mit $w \otimes \alpha = 0$, wenn ein Homomorphismus $W^* \to \widetilde{V}$ in die durch α definierte Erweiterung $\widetilde{V}$ existiert, so daß das Kompositum $W^* \to \widetilde{V} \to K$ surjektiv ist.

Beweis. W sei ein Λ-Modul und $w \in W^\Lambda$. Per Definition ist $w \otimes \alpha$ das Bild von α unter dem von $V \to W \otimes V$, $v \mapsto w \otimes v$ induzierten Homomorphismus $\text{Ext}^1_\Lambda(K,V) \to \text{Ext}^1_\Lambda(K, W \otimes V)$. Nach der Konstruktion des Cup-Produkts durch projektive Auflösungen (siehe Benson [3, S. 52]) ist $w \otimes \alpha = \varphi \cup \alpha$, wobei $\varphi \in \text{Ext}^0_\Lambda(K,W) = \text{Hom}_\Lambda(K,W)$ durch $1 \mapsto w$ gegeben ist. Andererseits ist $\alpha \cup \varphi$ nach Benson [3, Proposition 3.2.1] gleich dem Yoneda-Kompositum von $\alpha \otimes \text{id}_W$ und φ: Ist

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \widetilde{V} \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0$$

eine durch α gegebene Erweiterung, so wird eine Erweiterung zu $\alpha \cup \varphi$ durch die obere Zeile von

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \otimes W \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \otimes W \arrow[r] & \widetilde{V} \otimes W \arrow[r, "\pi\otimes\mathrm{id}_W"] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

geliefert, wobei X das Faserprodukt von $\widetilde{V} \otimes W$ und K über W ist. Aus der universellen Eigenschaft des Faserprodukts folgt, daß die Erweiterung genau dann zerfällt, wenn es einen Homomorphismus $K \to \widetilde{V} \otimes W$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl] \arrow[d, "\varphi"] \\
\widetilde{V} \otimes W \arrow[r, "\pi\otimes\mathrm{id}_W"] & W
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Mit dem natürlichen Isomorphismus $\widetilde{V} \otimes W \cong \mathrm{Hom}_K(W^*, \widetilde{V})$ erhalten wir daraus durch Verfolgen der $1 \in K$ im obigen Diagramm die Bedingung, daß ein Homomorphismus $W^* \to \widetilde{V}$ existiert, so daß

$$\begin{tikzcd}
 & W^* \arrow[dl] \arrow[d, "\varphi^*"] \\
\widetilde{V} \arrow[r, "\pi"] & K
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies führt genau auf die behauptete Bedingung für W. Sie wird von $W = \widetilde{V}^*$ erfüllt. □

Wir können nun die Resultate aus Abschnitt 1 benutzen, um eine Umkehrung von Satz 2.8 zu beweisen.

Satz 2.13. *Unter den Voraussetzungen 2.1 sei Λ geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$. Ist dann der Invariantenring $S(V)^\Lambda$ Cohen-Macaulay für alle Λ-Moduln V aus $\mathcal{C}$, so ist Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$.*

Beweis. Es seien V ein Λ-Modul in $\mathcal{C}$ und $\alpha \in \mathcal{C}\text{-}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, V)$. Nach Lemma 2.12 existiert ein Λ-Modul W in $\mathcal{C}$ und $w \in W^\Lambda$ mit $w \otimes \alpha = 0$. Wir bilden

$$R = S(V \oplus W \oplus W \oplus W)$$

und bezeichnen die Bilder von w in den verschiedenen Kopien von W mit $a_1, a_2, a_3 \in R^\Lambda$. V und drei Kopien von $W \otimes V$ treten als direkte Summanden in R auf, also haben wir Einbettungen $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, V) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, R)$ und $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, W \otimes V) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, R)$. Das Bild von α in $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, R)$ bezeichnen wir wieder mit α. Es folgt

$$a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{Ann}_{R^\Lambda}(\alpha). \tag{2.2}$$

Wir zeigen nun, daß das Ideal $I := (a_1, a_2, a_3)R^\Lambda$ die Höhe 3 hat. Für $0 \leq i \leq 3$ sei $P_i = (a_1, \ldots, a_i)R \cap R^\Lambda$, wobei $(a_1, \ldots, a_i)R$ das von $a_1, \ldots, a_i$ erzeugte ideal in R und $P_0 = 0$ ist. Dann sind alle P_i Primideale in R^Λ, und $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq P_2 \subsetneqq P_3$. Sei $P \subset R^\Lambda$ irgend ein Primideal mit $I \subseteq P$. Mit Proposition 2.10 folgt dann

$$P_3 = \sqrt{P_3} = \sqrt{(a_1, \dots, a_3)R} \cap R^\Lambda = \sqrt{I} \subseteq \sqrt{P} = P,$$

wir haben also $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq P_2 \subsetneqq P$. Es folgt $\mathrm{ht}(I) \geq 3$, und Gleichheit nach dem Krullschen Hauptidealsatz (siehe Eisenbud [18, Theorem 10.2]). Keines der a_i liegt also in einem assoziierten Primideal der Höhe $i-1$ von $(a_1, \dots, a_{i-1})R^\Lambda$. Da R^Λ nach Voraussetzung Cohen-Macaulay ist, folgt nun aus dem Ungemischtheitssatz von Macaulay (siehe Eisenbud [18, Corollary 18.14]), daß a_i in keinem assoziierten Primideal von $(a_1, \dots, a_{i-1})R^\Lambda$ liegt, also ist a_1, a_2, a_3 eine R^Λ-reguläre Sequenz. Wegen (2.2) würde aus $\alpha \neq 0$ nach Satz 1.9 ein Widerspruch folgen. Da V und α beliebig gewählt waren, folgt die lineare Reduktivität von Λ aus Proposition 2.11. □

Im folgenden betrachten wir den Spezialfall von Satz 2.13, in dem Λ ein Gruppenring ist.

Korollar 2.14. *Es seien G eine endliche Gruppe und K ein Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Für jeden endlich dimensionalen KG-Modul V ist $S(V)^G$ Cohen-Macaulay.

(b) $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$.

Beweis. Nach Proposition 2.4(b) ist $\Lambda := KG$ geometrisch reduktiv. Also ist nach Satz 2.8 und 2.13 die Aussage (a) gleichbedeutend damit, daß alle endlich dimensionalen KG-Moduln voll reduzibel sind. Dies ist aber äquivalent zu $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$. □

Lineare algebraische Gruppen. Ist G eine lineare algebraische Gruppe, so läßt sich der Invariantenring von G nur im Fall von algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern K als Invariantenring der Gruppenalgebra KG schreiben. Ist K jedoch nicht algebraisch abgeschlossen, so befinden wir uns in einer anderen Situation, auf die wir nun eingehen.

Eine **lineare algebraische Gruppe** G über einem nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper K ist für uns ein glattes affines Gruppenschema vom endlichen Typ über K (siehe Mumford et al. [50, Definition 0.2]). Im Falle $\mathrm{char}(K) = 0$ ist nach Waterhouse [73, Theorem 11.4] jedes affine Gruppenschema glatt. Unter einem **affinen G-Schema** X verstehen wir ein affines Schema vom endlichen Typ über K mit einem Morphismus $\rho\colon G \times X \to X$, so daß die üblichen Diagramme kommutieren (siehe Mumford et al. [50, Definition 0.3]). Falls X ein affiner n-Raum über K ist und die G-Operation durch einen Morphismus $G \to \mathrm{GL}_n(K)$ gegeben ist, so wird X auch als **G-Modul** bezeichnet. Es seien $K[G]$ bzw. $K[X]$ die Koordinatenringe von G bzw. dem affinen G-Schema X. Dann haben wir einen Homomorphismus

$$\rho^*\colon K[X] \to K[G] \otimes_K K[X]$$

von K-Algebren. Ein $f \in K[X]$ heißt eine **Invariante**, falls $\rho^*(f) = 1 \otimes f$, und der **Invariantenring** $K[X]^G$ besteht aus allen Invarianten (siehe Mumford et al. [50, Definition 1.3]). Falls $\bar{K}$ der algebraische Abschluß von K ist, so gilt

$$\bar{K}[\mathrm{Spec}(\bar{K}) \times X]^{\mathrm{Spec}(\bar{K}) \times G} = \bar{K} \otimes K[X]^G,$$

da $K[X]^G$ der Kern einer K-linearen Abbildung ist. Dies erlaubt oft eine Reduktion auf den Fall von algebraisch abgeschlossenen Körpern. Die Menge $G(K) := \mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(K), G)$ der (K-rationalen) geometrischen Punkte von G trägt eine Gruppenstruktur, und $G(K)$ operiert auf $K[X]$ durch

$$\sigma(f) = (\sigma^* \otimes \mathrm{id})(\rho^*(f)) \quad \text{für} \quad \sigma \in G(K),\ f \in K[X],$$

wobei $\sigma^*\colon K[G] \to K$ die zu σ gehörende Abbildung ist. Damit wird $K[X]$ zu einer Λ-Algebra für $\Lambda := KG(K)$. Falls K algebraisch abgeschlossen ist, so folgt aus der Reduziertheit von $K[G]$

(siehe Waterhouse [73, Theorem 11.6]), daß der Invariantenring genau aus den Elementen von $K[X]$ besteht, die von $G(K)$ festgelassen werden. In diesem Fall gilt also $K[X]^G = K[X]^\Lambda$. Wir bemerken außerdem, daß für einen G-Modul V die Menge $V(K) := \mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(K), V)$ ein K-Vektorraum mit einer Operation von $G(K)$ ist, und $K[V] = S(V(K))$.

Eine lineare algebraische Gruppe G heißt **linear reduktiv**, falls jeder G-Modul voll reduzibel ist, und **reduktiv** (auch „gruppentheoretisch reduktiv"), falls das unipotente Radikal von G (d.h. der maximale zusammenhängende unipotente Normalteiler) trivial ist. Falls G linear reduktiv ist, so ist G reduktiv, und für $\mathrm{char}(K) = 0$ gilt auch die Umkehrung (siehe Springer [68, V., Satz 1.1]). In positiver Charakteristik sind die linear reduktiven Gruppen von Nagata [51] klassifiziert worden. Demnach ist G genau dann linear reduktiv, wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G nicht durch $\mathrm{char}(K)$ teilbar ist und die 1-Komponente G^0 ein Torus ist. In positiver Charakteristik unterscheiden sich also die Begriffe von linearer- und gruppentheoretischer Reduktivität beträchtlich.

Satz 2.15. *Es sei G eine reduktive lineare algebraische Gruppe über einem beliebigen Körper K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Für alle G-Moduln V ist $K[V]^G$ Cohen-Macaulay.

(b) G ist linear reduktiv.

Beweis. Es seien $\bar{K}$ der algebraische Abschluß von K und $\bar{G} = \mathrm{Spec}(\bar{K}) \times G$. $\bar{G}$ ist glatt, da nach Waterhouse [73, Theorem 11.6] $\bar{K} \otimes_K K[G]$ reduziert ist. Zu einem G-Modul V sei $\bar{V} = \mathrm{Spec}(\bar{K}) \times V$, also ist $\bar{V}(\bar{K})$ ein Modul über der Gruppenalgebra $\Lambda := \bar{K}\bar{G}(\bar{K})$. $\mathcal{C}$ sei die Kategorie aller Λ-Moduln von der Form $\bar{V}(\bar{K})$ mit einem G-Modul V. Es ist klar, daß $\mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie der Modulkategorie von Λ ist. Nach Haboush [26] ist G geometrisch reduktiv, was bedeutet, daß Λ geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$ ist, denn jede Invariante läßt sich als $\bar{K}$-Linearkombination von K-rationalen Invarianten schreiben. Damit ist Satz 2.13 anwendbar.

Es sei V ein G-Modul. Falls V voll reduzibel ist, so ist auch $\bar{V}(\bar{K})$ voll reduzibel (als Objekt in $\mathcal{C}$). Da das Zerfallen von kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{C}$ auf die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen über K hinausläuft, gilt auch die Umkehrung. Also ist G genau dann linear reduktiv, wenn Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$ ist. Weiter gilt für einen G-Modul V

$$S\left(\bar{V}(\bar{K})\right)^\Lambda = \bar{K}[\bar{V}]^{\bar{G}} = \bar{K} \otimes_K K[V]^G.$$

Nach Nagata [52] ist $K[V]^G$ eine endlich erzeugte K Algebra, also ist $K[V]^G$ nach Bruns und Herzog [11, Theorem 2.1.10] genau dann Cohen-Macaulay, wenn dies für $\bar{K} \otimes_K K[V]^G$ gilt.

Nun folgt die Implikation „(a) $\Rightarrow$ (b)" aus Satz 2.13, und die Implikation „(b) $\Rightarrow$ (a)" aus Satz 2.8. □

Anmerkung 2.16. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Reduktivitätsvoraussetzung in Satz 2.15 nicht überflüssig ist. Man betrachte die additive Gruppe $G = G_a(\mathbb{C})$ und einen G-Modul V. Die Operation von $G_a(\mathbb{C})$ läßt sich zu einer $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-Operation fortsetzen (siehe Kraft [46, III.3.9]), und es gilt die 1861 von Roberts bewiesene Isomorphie

$$\mathbb{C}[V]^{G_a(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}[V \oplus \mathbb{C}^2]^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})},$$

wobei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ in natürlicher Weise auf $\mathbb{C}^2$ operiert (siehe Springer [67, S. 69, Anmerkung 4] oder Schur [60, Satz 1.14]). Mit dem Satz von Hochster und Roberts [29] folgt nun, daß $\mathbb{C}[V]^G$ Cohen-Macaulay ist, obwohl G nicht (linear) reduktiv ist. Der Grund für das Versagen von Satz 2.13 liegt darin, daß schon Proposition 2.10 über die geometrische Rückschnitteigenschaft für G_a falsch wird.

Ich danke David Wehlau und Vladimir Popov für den Hinweis auf die oben genannte Isomorphie.

Zusammen mit Sätzen von Nagata und Popov bekommen wir nun eine Charakterisierung von linear reduktiven Gruppen (innerhalb der linearen algebraischen Gruppen) durch ihre Invariantenringe.

Korollar 2.17. *G sei eine lineare algebraische Gruppe über einem beliebigen Körper K. G ist genau dann linear reduktiv, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(a) Für jedes affine G-Schema X ist $K[X]^G$ eine endlich erzeugte K-Algebra.

(b) Für jeden G-Modul V ist $K[V]^G$ Cohen-Macaulay.

Beweis. Falls G linear reduktiv ist, so folgt (a) aus dem Satz von Hilbert und Nagata (siehe Nagata [52]), und (b) folgt aus Satz 2.8, der für linear reduktive Gruppen zum ersten Mal von Hochster und Roberts [29] bewiesen wurde.

Sind umgekehrt (a) und (b) erfüllt, so ist auch $\bar{K} \otimes K[X]^G$ endlich erzeugt, also ist $\operatorname{Spec}(\bar{K}) \times G$ nach Popov [57] reduktiv, und damit auch G. Also ist Satz 2.15 anwendbar und liefert die lineare Reduktivität von G. $\square$

2.3 Lie-Algebren und Koordinatenringe algebraischer Gruppen

Wir fragen nun, was lineare- und geometrische Reduktivität für universell Einhüllende von Lie-Algebren bzw. für Koordinatenringe von abelschen linearen algebraischen Gruppen bedeuten, und welche Aussagen man aus den Sätzen 2.8 und 2.13 gewinnen kann. Wir beginnen mit den universell Einhüllenden von Lie-Algebren.

Reduktivität von Lie-Algebren. Eine Lie-Algebra heißt geometrisch- bzw. linear reduktiv, falls ihre universell Einhüllende die entsprechende Eigenschaft hat. Die folgende Proposition gibt an, für welche Lie-Algebren diese Eigenschaften gelten. Es ist bemerkenswert, wie stark sich der modulare Fall von dem Fall mit Charakteristik 0 unterscheidet. Die wesentlichen Beweisteile wurden mir von Vladimir Popov (Teil (a)) und Alexander Premet (Teil (b)) geliefert.

Proposition 2.18. *Es seien $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem Körper K und $\mathcal{C}$ die Kategorie der endlich dimensionalen $\mathfrak{g}$-Moduln. Dann gelten:*

(a) Falls K die Charakteristik 0 hat, so gilt die Äquivalenz

$$\mathfrak{g} \text{ ist linear reduktiv} \iff \mathfrak{g} \text{ ist geometrisch reduktiv} \iff \mathfrak{g} \text{ ist halbeinfach.}$$

(b) Falls K positive Charakteristik hat, so ist $\mathfrak{g}$ immer geometrisch reduktiv, und $\mathfrak{g}$ ist genau dann linear reduktiv, wenn $\mathfrak{g} = 0$.

Dabei bedeutet Reduktivität jeweils Reduktivität bezüglich $\mathcal{C}$.

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall $\operatorname{char}(K) = 0$. Falls $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, so ist $\mathfrak{g}$ nach einem Satz von Hermann Weyl (siehe Bourbaki [9, Kap. I, § 6, Theorem 2]) linear reduktiv. Ist $\mathfrak{g}$ linear reduktiv, so ist $\mathfrak{g}$ wegen Proposition 2.4(a) auch geometrisch reduktiv.

Nun sei $\mathfrak{g}$ geometrisch reduktiv. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{g}$ nicht reduktiv sei, also existiert ein nilpotentes Ideal $0 \neq \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{g}$. Nach dem Satz von Ado (Bourbaki [9, Kap. I, § 7, Theorem 3]) gibt es eine treue Darstellung φ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(K)$ in die Lie-Algebra der $n \times n$-Matrizen, so daß $\varphi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{n}$ nilpotent ist. Wir betrachten $\mathfrak{g}$ als Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(K)$. Es sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Für über K definierte abgeschlossene Untergruppen $G, H \leq \mathrm{GL}_n(\bar{K})$ ist auch $G \cap H$ über K definiert, und nach Humphreys [31, Theorem 12.5] gilt $\operatorname{Lie}(G \cap H) = \operatorname{Lie}(G) \cap \operatorname{Lie}(H)$. Es sei $\hat{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\bar{K})$ der Durchschnitt über alle $\operatorname{Lie}(H)$ mit $\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Lie}(H)$, wobei H die über K definierten abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\bar{K})$ durchläuft. Dann folgt $\hat{\mathfrak{g}} = \operatorname{Lie}(G)$ mit $G \leq \mathrm{GL}_n(\bar{K})$ definiert über K. Wir behaupten, daß $\bar{\mathfrak{n}} := \bar{K} \otimes_K \mathfrak{n}$ ein Ideal in $\hat{\mathfrak{g}}$ ist. $U := \{\sigma \in \mathrm{GL}_n(\bar{K}) \mid \sigma\bar{\mathfrak{n}}\sigma^{-1} \subseteq \bar{\mathfrak{n}}\}$ ist nämlich eine über K definierte abgeschlossene Untergruppe, also folgt

$$\operatorname{Lie}(U) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\bar{K}) \mid \operatorname{ad}(x)\bar{\mathfrak{n}} \subseteq \bar{\mathfrak{n}}\}$$

nach Humphreys [31, Theorem 13.2]. Da $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, liegt $\mathfrak{g}$ in $\operatorname{Lie}(U)$, also auch $\hat{\mathfrak{g}} \subseteq \operatorname{Lie}(U)$ wegen der Minimalität. Dies bedeutet aber, daß $\bar{\mathfrak{n}}$ ein Ideal in $\hat{\mathfrak{g}}$ ist, wie behauptet.

Wegen $\hat{\mathfrak{g}} = \operatorname{Lie}(G)$ hat G einen zusammenhängenden Normalteiler N mit $\operatorname{Lie}(N) = \bar{\mathfrak{n}}$. Es folgt, daß N unipotent ist, also ist G nicht (gruppentheoretisch) reduktiv. Nach Haboush [26] ist G auch nicht geometrisch reduktiv, also existiert eine endlich dimensionale Darstellung $G \to \operatorname{GL}(\bar{V})$ und ein $0 \neq v \in \bar{V}^G$, so daß $f(v) = 0$ für alle $f \in S^r(\bar{V}^*)^G$ mit $r > 0$. Wir können annehmen, daß $\bar{V}$ über K definiert ist, also $\bar{V} = \bar{K} \otimes_K V$, und $v \in V$. V ist also auch ein $\mathfrak{g}$-Modul, und $v \in V^{\mathfrak{g}}$. Es sei $r > 0$ und $f \in S^r(V^*)^{\mathfrak{g}}$. $H := \{\sigma \in G \mid \sigma(f) = f\}$ ist eine über K definierte, abgeschlossene Untergruppe von G, und nach Humphreys [31, Theorem 13.2] gilt

$$\operatorname{Lie}(H) = \{x \in \hat{\mathfrak{g}} \mid xf = 0\}.$$

Es folgt $\mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Lie}(H) \subseteq \hat{\mathfrak{g}}$, wegen der Minimalität von $\hat{\mathfrak{g}}$ also $\hat{\mathfrak{g}} = \operatorname{Lie}(H)$. Damit haben wir $f \in S^r(V^*)^{\hat{\mathfrak{g}}} = S^r(V^*)^G$, wobei die letzte Gleichung wieder aus Humphreys [31, Theorem 13.2] folgt. Es gilt also $f(v) = 0$. Dies zeigt, daß $\mathfrak{g}$ nicht geometrisch reduktiv ist, also war die Annahme, daß $\mathfrak{g}$ nicht reduktiv ist, falsch.

Also ist $\mathfrak{g}$ nach Bourbaki [9, Kap. I, § 6, Proposition 5] direkte Summe einer halbeinfachen und einer kommutativen Lie-Algebra: $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{a}$. Wir nehmen $\mathfrak{a} \neq 0$ an. Dann hat $\mathfrak{g}$ einen zu K isomorphen Quotienten, also gibt es eine Darstellung $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}_K(K^2)$, so daß $\mathfrak{g}$ als $K \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ operiert. Damit ist $\mathfrak{g}$ nicht geometrisch reduktiv. Es folgt, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$ halbeinfach ist. Damit ist der Fall $\operatorname{char}(K) = 0$ abgeschlossen.

Nun behandeln wir den Fall $\operatorname{char}(K) = p > 0$. Falls $\mathfrak{g} \neq 0$ ist, so gibt es nach Jacobson [33] eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, die nicht vollständig reduzibel ist, also ist $\mathfrak{g}$ nicht linear reduktiv. Sei jetzt $\mathfrak{g}$ beliebig und V ein $\mathfrak{g}$-Modul. Aus der Definition der Komultiplikation Δ (siehe Beispiel 1.6(a)) folgt, daß $\mathfrak{g}$ auf $S(V^*)$ durch Derivationen operiert, also gilt $f^p \in S(V^*)^{\mathfrak{g}}$ für $f \in S(V^*)$. Daraus folgt die geometrische Reduktivität von $\mathfrak{g}$. □

Für Lie-Algebren in Charakteristik 0 sagt Satz 2.13 also nichts aus. Im modularen Fall erhalten wir jedoch das folgende Ergebnis.

Korollar 2.19. *Es sei $\mathfrak{g} \neq 0$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra über einem Körper von positiver Charakteristik. Dann existiert ein endlich dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul V, so daß $S(V)^{\mathfrak{g}}$ nicht Cohen-Macaulay ist.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 2.18 und Satz 2.13. □

Reduktivität von Koordinatenringen abelscher linearer algebraischer Gruppen. Nun behandeln wir den Fall von Koordinatenringen abelscher linearer algebraischer Gruppen (siehe Beispiel 1.6(b)).

Proposition 2.20. *Es sei $\Lambda = K[G]$ mit einer abelschen linearen algebraischen Gruppe G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Λ ist linear reduktiv bezüglich der Kategorie $\mathcal{C}$ der Λ-Moduln von endlicher K-Dimension.

(b) G hat die Dimension 0.

Hat K die Charakteristik 0, so ist außerdem zu (a) und (b) äquivalent:

(c) Λ ist geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$.

Hat K positive Charakteristik, so ist Λ geometrisch reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$.

Beweis. Wegen der Glattheit von G ist Λ nach Waterhouse [73, Theorem 11.6] reduziert. Es gelte $\dim(\Lambda) = 0$. Dann besteht $\operatorname{Spec}(\Lambda)$ aus endlich vielen maximalen Idealen $P \subset \Lambda$, und $\bigcap_{P \in \operatorname{Spec}(\Lambda)} P = 0$. Für $P \in \operatorname{Spec}(\Lambda)$ gilt $\bigcap_{P' \in \operatorname{Spec}(\Lambda) \setminus \{P\}} P' \not\subseteq P$, also existiert ein $\delta_P \in \Lambda$ mit

$$\delta_P \equiv \delta_{P,P'} \mod P'$$

für $P' \in \operatorname{Spec}(\Lambda)$, wobei $\delta_{P,P'}$ das Kronecker-Symbol ist. Die δ_P sind orthogonale Idempotente und $\sum_{P \in \operatorname{Spec}(\Lambda)} \delta_P = 1$. Ist V ein endlich dimensionaler Λ-Modul, so erhalten wir die Zerlegung

$$V = \bigoplus_{P \in \operatorname{Spec}(\Lambda)} V_P$$

mit $V_P := \delta_P \cdot V$. Für $P \in \operatorname{Spec}(\Lambda)$ ist V_P ein Modul über dem Körper Λ/P, also voll reduzibel. Es folgt, daß Λ linear reduktiv bezüglich $\mathcal{C}$ ist.

Nun sei $\dim(\Lambda) > 0$. Ist $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$ eine Präsentation, so ist der Differentialmodul Ω_Λ von Λ nach Waterhouse [73, Theorem 11.1] gegeben durch Erzeuger dx_i mit den Relationen $\sum_{i=1}^n (\partial f_j / \partial x_i) dx_i = 0$ für $j = 1, \ldots, m$. Wir haben einen Homomorphismus $\widetilde{\epsilon}$: $K[x_1, \ldots, x_n] \to K$ durch Verkettung der Koeinheit mit $K[x_1, \ldots, x_n] \to \Lambda$. Die Jacobi-Matrix $\left(\widetilde{\epsilon}(\partial f_j / \partial x_i)\right)_{i,j}$ hat nach Eisenbud [18, Theorem 16.19] höchstens den Rang $n - \dim(\Lambda) < n$. Es gibt also einen Homomorphismus $0 \neq \varphi$: $\Omega_\Lambda \to K$ von Λ-Moduln. Wegen der universellen Eigenschaft von Ω_Λ (siehe Waterhouse [73, Theorem 11.1]) existiert eine K-Derivation $0 \neq d$: $\Lambda \to K$. Um zu zeigen, daß Λ nicht linear reduktiv ist, betrachten wir den Vektorraum $V := Kv \oplus Kw$. V wird durch

$$\lambda v = \epsilon(\lambda) v \quad \text{und} \quad \lambda w = \epsilon(\lambda) w + d(\lambda) v \quad \text{für } \lambda \in \Lambda$$

zu einem Λ-Modul, denn für $\lambda, \mu \in \Lambda$ gilt

$$\lambda(\mu w) = \lambda\left(\epsilon(\mu) w + d(\mu) v\right) = \epsilon(\lambda)\epsilon(\mu) w + d(\lambda)\epsilon(\mu) v + \epsilon(\lambda) d(\mu) v = (\lambda\mu) w.$$

Wegen $d \neq 0$ ist V aber nicht voll reduzibel, also ist Λ nicht linear reduktiv. Damit ist die Äquivalenz von (a) und (b) gezeigt.

Wir nehmen nun $\operatorname{char}(K) = 0$ an und zeigen, daß Λ nicht geometrisch reduktiv ist, falls $\dim(\Lambda) > 0$ gilt. Mit Proposition 2.4(a) folgt daraus die Äquivalenz der Aussagen (a)–(c). Genauer zeigen wir, daß es zu dem oben konstruierten Λ-Modul V kein $r > 0$ und $f \in S^r(V^*)^\Lambda$ gibt mit $f(v) \neq 0$. Wir können annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist, denn wenn $f(v) = 0$ für alle $f \in \bar{K} \otimes_K S^r(V^*)^\Lambda$ ($\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K), dann erst recht für alle $f \in S^r(V^*)^\Lambda$. Außerdem ist nach Waterhouse [73, Theorem 11.6] auch $\bar{K} \otimes_K \Lambda$ reduziert. Wegen Waterhouse [73, Theorem 3.4] und dem Satz von Lie-Kolchin (siehe Waterhouse [73, Theorem 10.2]) wird Λ erzeugt von Elementen $x_{i,j}$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) und der Inversen $(x_{1,1} \cdots x_{n,n})^{-1}$, und die Komultiplikation Δ und die Koeinheit ϵ sind gegeben durch

$$\Delta(x_{i,j}) = \sum_{k=i}^{j} x_{i,k} \otimes x_{k,j}, \quad \epsilon(x_{i,j}) = \delta_{i,j}. \tag{2.3}$$

Weiter ist die Antipode η gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \eta(x_{1,1}) & \cdots & \eta(x_{1,n}) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \eta(x_{n,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & x_{n,n} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{2.4}$$

Für $f \in V^*$ und $\lambda \in \Lambda$ ist λf durch $v \mapsto f(\eta(\lambda)v)$ für $v \in V$ definiert. Bilden $x, y \in V^*$ die Dualbasis von v, w, so folgt

$$x_{i,i}x = x - d(x_{i,i})y \quad \text{und} \quad x_{i,i}y = y.$$

Wegen $d \neq 0$ gilt $d(x_{i,j}) \neq 0$ für mindestens ein Paar (i,j). Wir betrachten zunächst den Fall, daß $d(x_{i,i}) \neq 0$ für ein i gilt. Wegen (2.3) gilt $x_{i,i}(f \cdot g) = x_{i,i}f \cdot x_{i,i}g$ für $f, g \in S(V^*)$, also operiert $x_{i,i}$ als Automorphismus von Algebren auf $S(V^*)$. Für $f \in S^r(V^*)^\Lambda$ folgt also $f(x,y) = f(x - d(x_{i,i})y, y)$, also $f \in K[y]$ wegen $\mathrm{char}(K) = 0$. Es folgt $f(v) = 0$, falls $r > 0$.

Im Fall $d(x_{i,i}) = 0$ für alle i wählen wir i und j so, daß $d(x_{i,j}) \neq 0$ mit $j - i$ minimal. Aus (2.4) sieht man, daß alle $x_{i',i'}$ als Identität und alle $x_{i',j'}$ mit $j' - i' < j - i$ als Nullabbildung auf V^* operieren, und

$$x_{i,j}x = -d(x_{i,j})y, \quad x_{i,j}y = 0.$$

Aus (2.3) folgt für $f, g \in S(V^*)$

$$x_{i,j}(f \cdot g) = \sum_{k=i}^{j} x_{i,k}f \cdot x_{k,j}g = f \cdot x_{i,j}g + x_{i,j}f \cdot g,$$

also operiert $x_{i,j}$ als Derivation auf $S(V^*)$. Genauer gilt $x_{i,j}f = -d(x_{i,j})y \cdot \partial f/\partial x$ für $f \in S(V^*)$. Wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ folgt also $f \in K[y]$ für $f \in S^r(V^*)^\Lambda$, also wieder $f(v) = 0$, falls $r > 0$. Damit ist die Äquivalenz der Aussagen (a)–(c) für $\mathrm{char}(K) = 0$ gezeigt.

Wir zeigen nun, daß Λ geometrisch reduktiv ist, falls $p := \mathrm{char}(K) > 0$. Es seien also V ein Λ-Modul und $0 \neq v \in V^\Lambda$. Falls es gelingt, ein $f \in \bar{K} \otimes_K S^r(V^*)^\Lambda$ mit $r > 0$ und $f(v) \neq 0$ zu finden, so liefert das Produkt über alle Galois-Konjugierten von f ein $\widetilde{f} \in S^{\widetilde{r}}(V^*)^\Lambda$ mit $\widetilde{f}(v) \neq 0$. Wir können also annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist. Dann wird Λ wie oben von Elementen $x_{i,j}$ erzeugt ($1 \leq i \leq j \leq n$), und wir haben die Formeln (2.3) und (2.4) für die Komultiplikation, Koeinheit und Antipode. Die $x_{i,j}$ operieren als vertauschbare Endomorphismen auf V, die verallgemeinerten Eigenräume der $x_{i,j}$ sind also Λ-Untermoduln. Daher gibt es einen Untermodul W mit $v \in W$, so daß $x_{i,j}$ bezüglich einer Basis $v = v_1, \ldots, v_n$ von W als obere Dreiecksmatrix mit $\delta_{i,j}$ auf der Diagonalen operiert, und W hat ein Λ-Komplement. Es genügt, ein $f \in S^r(W^*)^\Lambda$ mit $r > 0$ und $f(v) \neq 0$ zu finden, wir können also $W = V$ annehmen. Wie oben sehen wir, daß $x_{i,i}$ auf V^* bezüglich der Dualbasis von $v_1, \ldots, v_n$ als untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen operiert. Wegen $\mathrm{char}(K) = p$ operiert $x_{i,i}$ also als Automorphismus endlicher Ordnung e_i. Wie oben operiert $x_{i,i}$ auch auf $S(V^*)$ als Automorphismus von Algebren. Für $g \in S^r(V^*)$ mit $g(v) \neq 0$ sei $f := \prod_{j=1}^{e_i} x_{i,i}^j g$. Dann gelten

$$x_{i,i}f = \prod_{j=1}^{e_i} x_{i,i}x_{i,i}^j g = f \quad \text{und} \quad f(v) = \prod_{j=1}^{e_i} g\left(\eta(x_{i,i}^j)v\right) = g(v)^{e_i} \neq 0.$$

Durch Iteration folgt, daß auch ein $f \in S^r(V^*)$ mit $f(v) \neq 0$, $x_{i,i}f = f$ für $i = 1, \ldots, n$ und $r > 0$ existiert. Wir behaupten nun, daß für $k = 0, \ldots, n-1$ gilt: Sind $1 \leq i \leq n - k$ und $k' \geq k$, so gilt $x_{i,i+k}f^{p^{k'}} = \delta_{k,0}$. Wir zeigen dies durch Induktion nach k, wobei der Fall $k = 0$ schon erledigt ist. Es sei also $k > 0$. Für $g, h \in S(V^*)$ mit $x_{i,j}g = x_{i,j}h = \delta_{i,j}$ für $j - i < k$ gilt wegen (2.3)

$$x_{i,i+k}(g \cdot h) = \sum_{l=i}^{i+k} x_{i,l}g \cdot x_{l,i+k}h = g \cdot x_{i,i+k}h + x_{i,i+k}g \cdot h,$$

$x_{i,i+k}$ operiert also auf diesen Polynomen als Derivation. Nach Induktionsannahme operiert $x_{i,i+k}$ also auf $f^{p^{k'-1}}$ als Derivation, und wegen $\mathrm{char}(K) = p$ folgt $x_{i,i+k}f^{p^{k'}} = 0$, wie behauptet. Es folgt $f^{p^{n-1}} \in S^{rp^{n-1}}(V^*)^\Lambda$ und $f^{p^{n-1}}(v) \neq 0$. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Anmerkung. Eine leichte Erweiterung im letzten Teil des obigen Beweises zeigt, daß in positiver Charakteristik $S(V)$ immer ganz ist über $S(V)^\Lambda$, wobei V ein endlich dimensionaler Λ-Modul und Λ der Koordinatenring einer abelschen linearen algebraischen Gruppe ist.

Die Sätze 2.8 und 2.13 liefern nun:

Korollar 2.21. *Es sei $\Lambda = K[G]$ der Koordinatenring einer abelschen linearen algebraischen Gruppe. Falls $\mathrm{char}(K)$ positiv ist, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $S(V)^\Lambda$ ist Cohen-Macaulay für alle endlich dimensionalen Λ-Moduln.

(b) G hat die Dimension 0.

Für $\mathrm{char}(K) = 0$ gilt immerhin die Implikation „(b) $\Rightarrow$ (a)“. Insbesondere gilt: Ist G eine endliche, abelsche Gruppe und V ein endlich dimensionaler G-graduierter Vektorraum, so ist die 1-Komponente $S(V)_1$ der symmetrischen Algebra Cohen-Macaulay.

Beweis. Die Äquivalenzaussage folgt aus Proposition 2.20, Satz 2.8 und Satz 2.13. Für die Zusatzaussage benutzen wir Beispiel 1.6(b), Proposition 2.20 und Satz 2.8. □

Beispiel 2.22. Der Koordinatenring $\Lambda := K[G_a]$ der additiven Gruppe ist nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt (siehe Bourbaki [9, Kap. I, § 2, Theorem 1]) isomorph zur universell Einhüllenden der kommutativen Lie-Algebra $\mathfrak{g} = K$ (als Hopf-Algebren). Genauer gilt $\Lambda = K[d]$ mit einer Unbestimmten d, und $\epsilon(d) = 0$, $\Delta(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d$. Ein Λ-Modul ist durch einen Vektorraum V die Operation von d als Endomorphismus von V gegeben. Weiter operiert d auf $S(V)$ als K-Derivation, und $S(V)^\Lambda = \{f \in S(V) \mid df = 0\}$. Sowohl Korollar 2.19 als auch Korollar 2.21 liefern also im Falle $\mathrm{char}(K) > 0$ die Existenz eines Polynomrings R und einer K-Derivation d auf R, so daß die Lösungen von $df = 0$, $f \in R$, einen Ring bilden, der nicht Cohen-Macaulay ist. Ein Beispiel hierfür ist das folgende: Wir betrachten den Polynomring $R = K[x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3]$ mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$, und darauf die Derivation

$$d = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Dann liegen die x_i in R^Λ, und ebenso die $u_{i,j} := x_i y_j - x_j y_i$. Nun haben wir die Relation (1.4) aus Beispiel 1.10, die zeigt, daß x_1, x_2, x_3 keine R^Λ-reguläre Sequenz bilden. Wegen $K[x_1, y_1^p, x_2, y_2^p, x_3, y_3^p] \subseteq R^\Lambda$ ist R ganz über R^Λ, also kann R^Λ nicht Cohen-Macaulay sein, denn nach Smith [64, Corollary 6.7.7] müßte sonst x_1, x_2, x_3 eine R^Λ-reguläre Sequenz sein.

Es fällt auf, daß für alle hier betrachteten Klassen von Hopf-Algebren die lineare Reduktivität und die geometrische Reduktivität für $\mathrm{char}(K) = 0$ gleichbedeutend sind. Daher liegt die folgende Vermutung nahe.

Vermutung 2.23. *Ist $\mathrm{char}(K) = 0$, so ist Λ genau dann linear reduktiv, wenn Λ geometrisch reduktiv ist.*

3 Endliche Gruppenoperationen

Während wir im letzten Abschnitt eine Gruppe G (oder eine Hopf-Algebra Λ) als vorgegeben angesehen und dazu geeignete Darstellungen konstruiert haben, wenden wir uns in diesem und im nächsten Abschnitt dem Problem zu, daß eine Gruppe G *zusammen* mit Operation auf einer Algebra R gegeben ist. Das Ziel ist, in dieser Situation Aussagen über die Cohen-Macaulay-Eigenschaft von R^G zu gewinnen. Wir beschränken uns dabei auf endliche Gruppen.

3.1 Einbettung von regulären Moduln

In Lemma 2.12 haben wir zu $\alpha \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(K, V)$ einen „speziell angepaßten" Modul W mit $0 \neq w \in W^\Lambda$ konstruiert, so daß $w \otimes \alpha = 0$. Falls Λ endlich dimensional ist, so ist dies nicht nötig, denn mit $W = \Lambda$ (der reguläre Modul) gilt schon $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, W \otimes V) = 0$ für $r > 0$, da $W \otimes V$ nach Benson [3, Proposition 3.1.5] projektiv ist. Um vom Invariantenring einer K-Algebra R nachzuweisen, daß sie nicht Cohen-Macaulay ist, würde es also schon genügen, hinreichend viele Exemplare des regulären Moduls in R einzubetten. Im Falle von Gruppenalgebren endlicher Gruppen wird dies (unter gewissen Voraussetzungen) von dem nachfolgenden Lemma geleistet. Für die Formulierung benötigen wir noch eine Definition.

Definition 3.1. *Es sei σ ein Endomorphismus eines Noetherschen Rings R. Dann heißt*

$$\operatorname{rk}(\sigma - 1) := \operatorname{rk}_R(\sigma - 1) := \operatorname{ht}\left((\sigma - 1)R \cdot R\right)$$

der **Rang** *von $\sigma - 1$. Dabei bezeichnet $(\sigma - 1)R \cdot R$ das von allen $\sigma(a) - a$, $a \in R$, erzeugte Ideal in R.*

Wir nennen $\sigma \in G$ eine **Spiegelung***, falls $\operatorname{rk}(\sigma - 1) = 1$, und eine* **Bireflexion***, falls $\operatorname{rk}(\sigma - 1) \leq 2$. Für die Menge aller Bireflexionen in G schreiben wir $\operatorname{Bir}(G)$.*

Anmerkung 3.2. In der Situation von Definition 3.1 werde R als Algebra über dem Fixring R^σ durch $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt. Dann wird das Ideal $(\sigma - 1)R \cdot R$ durch die $(\sigma - 1)x_i$ erzeugt. Dies folgt aus der Regel

$$(\sigma - 1)(ab) = \sigma(b)(\sigma - 1)a + a(\sigma - 1)b$$

für $a, b \in R$. Der Rang von $\sigma - 1$ läßt sich also meist leicht explizit ausrechnen.

Ist beispielsweise $R = S(V)$ die symmetrische Algebra eines K-Vektorraums V und σ durch $\sigma|_V \in \operatorname{End}_K(V)$ induziert, so ist der Rang von $\sigma - 1$ gleich dem Rang von $\sigma|_V - \operatorname{id}_V$ als Vektorraum-Endomorphismus, also

$$\operatorname{rk}(\sigma - 1) = \operatorname{codim}_V(V^\sigma).$$

Somit ist unser Begriff einer Spiegelung eine Verallgemeinerung der klassischen Spiegelung (oder auch „Pseudo-Spiegelung"). Wir bemerken noch, daß in der Literatur für Bireflexionen oft $\operatorname{rk}(\sigma - 1) = 2$ gefordert wird, während für uns auch Spiegelungen und die Identität zu den Bireflexionen zählen. Dies wird sich in Abschnitt 4 als zweckmäßig herausstellen.

Lemma 3.3. *R sei eine endlich erzeugte Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K, auf dem eine endliche Gruppe G durch Automorphismen von K-Algebren operiert. Wir setzten voraus, daß $\operatorname{rk}(\sigma - 1) > 0$ für jedes $1 \neq \sigma \in G$ gilt. Weiter seien $I \subsetneqq R^G$ ein Ideal im Invariantenring und $m > 0$ eine natürliche Zahl, so daß gelten:*

(i) $m \leq \dim(R/P)$ für alle minimalen $P \in \operatorname{Spec}(R)$;

(ii) $m \leq \operatorname{ht}(I)$;

(iii) $m \leq \operatorname{rk}(\sigma - 1)$ für alle $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$.

Dann existieren m Monomorphismen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \colon KG \hookrightarrow R$ von KG-Moduln, so daß die Invarianten

$$a_i := \sum_{\sigma \in G} \varphi_i(\sigma)$$

in $\sqrt{I}$ liegen, und

$$\operatorname{ht}\left((a_1, \ldots, a_m)R^G\right) = m.$$

Anmerkung. Für $R = S(V)$ mit einem KG-Modul V ist die Bedingung $\operatorname{rk}(\sigma - 1) > 0$ für $1 \neq \sigma \in G$ gleichbedeutend damit, daß G treu auf V operiert.

Beweis. Per Induktion nach m folgt die Existenz von $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$. Da R ganz ist über R^G, hat auch das Ideal $(a_1, \ldots, a_{m-1})R$ in R wegen des Aufstiegslemmas und des Krullschen Hauptidealsatzes die Höhe $m-1$. Es sei A_{m-1} die Menge aller assoziierten Primideale P von $(a_1, \ldots, a_{m-1})R$ mit $\operatorname{ht}(P) = m-1$. Für $P \in A_{m-1}$ gelten dann nach den Voraussetzungen $\operatorname{ht}(P) < \operatorname{ht}(IR)$ und $\operatorname{ht}(P) < \operatorname{ht}((\sigma-1)R \cdot R)$ für $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = p := \operatorname{char}(K)$, also

$$\operatorname{ht}(P) < \operatorname{ht}(J) \quad \text{für} \quad J := IR \cap \bigcap_{\substack{\sigma \in G, \\ \operatorname{ord}(\sigma) = p}} (\sigma - 1)R \cdot R,$$

da die Höhe eines endlichen Schnitts von Idealen immer gleich dem Minimum der Höhen ist. Wir nehmen nun an, daß es höchstens endlich viele maximale Ideale $Q \subset R$ gibt mit $P \subseteq Q$ und $J \not\subseteq Q$. Da R ein Jacobson-Ring ist (siehe Eisenbud [18, Theorem 4.19]), folgt daraus

$$P = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r \ \cap \bigcap_{\substack{Q \subset R \text{ maximal} \\ P, J \subseteq Q}} Q$$

mit gewissen maximalen Idealen $Q_1, \ldots, Q_r \subset R$. Die Höhe des letzten Schnitts ist hierbei mindestens $\operatorname{ht}(J)$. Also muß $\operatorname{ht}(Q_i) = \operatorname{ht}(P)$ für eines der Q_i gelten. Es folgt $\operatorname{ht}(Q_i) < m$. Q_i liegt aber über einem minimalen Primideal P_i, also hat auch Q_i/P_i als Ideal in R/P_i eine Höhe $< m$. Nach Eisenbud [18, S. 286] haben aber alle maximalen Ideale in R/P_i die Höhe $\dim(R/P_i)$ und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung (i). Es folgt also, daß es unendlich viele maximale Ideale $Q \subset R$ mit $P \subseteq Q$ und $J \not\subseteq Q$ gibt. Wir können also zu jedem $P \in A_{m-1}$ ein maximales Ideal $Q_P \subset R$ wählen, so daß gelten:

(i) $P \subseteq Q_P$,

(ii) $IR \not\subseteq Q_P$,

(iii) $(\sigma - 1)R \cdot R \not\subseteq Q_P$ für $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = p$,

(iv) $Q_P \neq \sigma(Q_{P'})$ für $\sigma \in G$ und $P, P' \in A_{m-1}$ mit $P \neq P'$.

Wir betrachten nun das Ideal

$$J' := IR \cap \bigcap_{\sigma \in G \setminus \{1\}} (\sigma - 1)R \cdot R,$$

das nach den Voraussetzungen positive Höhe hat. Wir nehmen an, daß es höchstens endlich viele maximale Ideale $Q \subset R$ mit $J' \not\subseteq Q$ gibt. Für ein minimales Primideal P folgt dann mit demselben Schluß wie oben $0 = \operatorname{ht}(P) = \operatorname{ht}(Q_i)$ für ein maximales Ideal Q_i, ein Widerspruch. Also existiert ein maximales Ideal Q mit den Eigenschaften

(v) $IR \not\subseteq Q$,

(vi) $(\sigma - 1)R \cdot R \not\subseteq Q$ für $1 \neq \sigma \in G$,

(vii) $Q \neq \sigma(Q_P)$ für $\sigma \in G,\ P \in A_{m-1}$.

R/Q ist eine endliche Körpererweiterung von K, also gleich K wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von K. Für $\sigma \in G$ gelte $\sigma(Q) = Q$. Da G trivial auf K operiert, folgt $(\sigma - 1)R \subseteq Q$, also $\sigma = 1$ nach (vi). Damit sind alle $\sigma(Q)$ verschieden, und außerdem sind die Mengen

$$\{\sigma(Q) \mid \sigma \in G\}, \quad \text{und} \quad \{\sigma(Q_P) \mid \sigma \in G\} \quad (P \in A_{m-1})$$

nach (iv) und (vii) paarweise disjunkt. Für $\sigma \in G$ gilt also wegen (v) und (vii)

$$RI \cap \bigcap_{\tau \in G \setminus \{\sigma\}} \tau(Q) \cap \bigcap_{\substack{\tau \in G,\\ P \in A_{m-1}}} \tau(Q_P) \not\subseteq \sigma(Q),$$

also existiert $g_\sigma \in R$, welches in allen Idealen aus dem Schnitt liegt, aber $g_\sigma \equiv 1 \mod \sigma(Q)$ erfüllt. Weiter existiert nach (ii), (iv) und (vii) für $P \in A_{m-1}$ ein $g_P \in R$ mit

$$g_P \in RI \cap \bigcap_{\sigma \in G} \sigma(Q) \ \cap \bigcap_{\substack{\sigma \in G, P' \in A_{m-1},\\ P' \neq P}} \sigma(Q_{P'}) \ \cap \bigcap_{\substack{\sigma \in G,\\ \sigma(Q_P) \neq Q_P}} \sigma(Q_P) \quad \text{und} \quad g_P \equiv 1 \mod Q_P.$$

Durch Linearkombination der g_σ und g_P erhalten wir ein $g \in R$ mit

(viii) $g \in RI$,

(ix) $g \equiv \delta_{\sigma,1} \mod \sigma(Q)$ für $\sigma \in G$,

(x) $g \equiv \delta_{\sigma(Q_P),Q_P} \mod \sigma(Q_P)$ für $P \in A_{m-1}$, $\sigma \in G$.

Dabei ist δ das Kronecker-Symbol. Wir definieren nun $\varphi_m\colon KG \to R$ durch $\sigma \mapsto \sigma(g)$. Dies ist ein Homomorphismus von KG-Moduln. Nachzuweisen ist die Injektivität, also die lineare Unabhängigkeit der $\sigma(g)$. Es sei $\sum_{\sigma \in G} \alpha_\sigma \cdot \sigma(g) = 0$ mit $\alpha_\sigma \in K$. Wegen (ix) gilt $\sigma(g) \equiv \delta_{\sigma^{-1}\tau,1} \mod \tau(Q)$ für $\sigma, \tau \in G$, also

$$0 \equiv \sum_{\sigma \in G} \alpha_\sigma \cdot \delta_{\sigma,\tau} = \alpha_\tau \mod \tau(Q).$$

Damit sind alle $\alpha_\sigma = 0$, und die Injektivität von φ_m ist gezeigt. Weiter gilt wegen (viii) $\sigma(g) \in \sigma(IR) = IR$, also mit Proposition 2.4 und 2.10

$$a_m = \sum_{\sigma \in G} \sigma(g) \in RI \cap R^G \subseteq \sqrt{I}.$$

Außerdem haben wir wegen (x) für $P \in A_{m-1}$

$$a_m \equiv |\{\sigma \in G \mid \sigma(Q_P) = Q_P\}| = |\{\sigma \in G \mid (\sigma - 1)R \subseteq Q_P\}| \mod Q_P.$$

Nach (iii) enthält die Untergruppe aller $\sigma \in G$ mit $(\sigma - 1)R \subseteq Q_P$ kein Element der Ordnung p, also $a_m \notin Q_P$. Wegen (i) folgt $a_m \notin P$ für alle $P \in A_{m-1}$, und damit $\operatorname{ht}((a_1, \ldots, a_m)R) \geq m$. Der Krullsche Hauptidealsatz liefert $\operatorname{ht}((a_1, \ldots, a_m)R) = m$, und wegen Proposition 1.13 und 1.15 folgt auch $= \operatorname{ht}\big((a_1, \ldots, a_m)R^G\big) = m$. $\square$

Anmerkung. Ist $H \leq G$ eine Untergruppe mit $\operatorname{char}(K) \nmid |H|$, so ist $V := KG \otimes_{KH} K$, der auf G hochinduzierte triviale KH-Modul, projektiv. Man könnte also auch versuchen, Exemplare von V in R einzubetten, so daß die darin enthaltenen Invarianten ein Ideal möglichst großer Höhe erzeugen. Es zeigt sich jedoch, daß dies zu keinerlei Abschwächung der Voraussetzungen in Lemma 3.3 führt.

Als Korollar erhalten wir die folgende einfache Aussage über Äquivarianten, für die mir kein elementarer Beweis bekannt ist.

Korollar 3.4. *Es seien G sei eine endliche Gruppe, K ein Körper und V ein endlich erzeugter, treuer KG-Modul. Ist $W \neq 0$ ein weiterer KG-Modul, so folgt*

$$(S(V^*) \otimes W)^G \neq 0.$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Ann}_{S(V^*)^G}\left((S(V^*) \otimes W)^G\right) = 0$.

Beweis. Ist $V = 0$, so folgt $G = \{1\}$ und $(S(V^*) \otimes W)^G = K \otimes W = W \neq 0$. Wir können also $V \neq 0$ voraussetzen. Da die Frage nach Invarianten in $S(V^*) \otimes W$ auf die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen über K hinausläuft, können wir ohne Einschränkung K als algebraisch abgeschlossen voraussetzen. Wegen $\dim\left((S(V^*)^G\right) = \dim(S(V^*)) > 0$ existiert ein Ideal positiver Höhe in $S(V^*)^G$. Die Voraussetzungen von Lemma 3.3 sind also für $m = 1$ erfüllt, also existiert ein Monomorphismus φ: $KG \to S(V^*)$ von KG-Moduln. Nun sehen wir, daß

$$f := \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma) \otimes \sigma(w)$$

für $w \in W$ in $(S(V^*) \otimes W)^G$ liegt, und wegen der linearen Unabhängigkeit der $\varphi(\sigma)$ gilt $f \neq 0$, falls $w \neq 0$. Dann folgt

$$\operatorname{Ann}_{S(V^*)^G}\left((S(V^*) \otimes W)^G\right) \subseteq \operatorname{Ann}_{S(V^*)^G}(f) = 0,$$

da $S(V^*) \otimes W$ ein freier Modul über $S(V^*)$ und $S(V^*)$ nullteilerfrei ist. □

Anwendung auf die Cohen-Macaulay-Eigenschaft. Bevor wir Lemma 3.3 auf die Cohen-Macaulay-Eigenschaft anwenden, benötigen wir noch einen Reduktionsschritt auf den algebraisch abgeschlossenen Fall.

Lemma 3.5. *Es seien R eine Noethersche Algebra über einem Körper K, M ein endlich erzeugter R-Modul und L ein algebraischer Erweiterungskörper von K. Falls M Cohen-Macaulay ist, so ist auch $L \otimes_K M$ Cohen-Macaulay (als $(L \otimes_K R)$-Modul).*

Beweis. Sei $Q \subset L \otimes_K R$ ein maximales Ideal. $R \subseteq L \otimes_K R$ ist flach und damit nach Proposition 1.13 eine Erweiterung mit Abstiegseigenschaft, also hat nach Proposition 1.15 $P := R \cap Q$ dieselbe Höhe wie Q. Wegen $\operatorname{ht}_R(P, M) = \operatorname{ht}_{R/\operatorname{Ann}(M)}(P/\operatorname{Ann}(M))$ folgt auch

$$\operatorname{ht}(Q, L \otimes_K M) = \operatorname{ht}(P, M) =: m.$$

Nach Voraussetzung existiert eine M-reguläre Sequenz $a_1, \dots, a_m \in P$. Nach Bruns und Herzog [11, Proposition 1.1.2] ist $a_1, \dots, a_m$ auch $(L \otimes_K M)$-regulär, also $\operatorname{depth}(Q, L \otimes_K M) = \operatorname{ht}(Q, L \otimes_K M)$. Das war zu zeigen. □

Satz 3.6. *Es sei $\Lambda = KG$ der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem beliebigen Körper K. Weiter seien R eine über K endlich erzeugte Λ-Algebra und M ein endlich erzeugter $(R\#\Lambda)$-Modul mit $\operatorname{Ann}_{R^G}(M^G) = 0$. Wir setzen voraus, daß M Cohen-Macaulay (über R) und M^Λ Cohen-Macaulay (über R^G) seien, und daß $\operatorname{rk}(\sigma - 1) > 0$ für $1 \neq \sigma \in G$. Falls $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M) \neq 0$ für ein $r > 0$, so gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:*

(a) $\dim(R/P) \leq r + 1$ *für ein minimales* $P \in \operatorname{Spec}(R)$, *oder*

(b) $\operatorname{rk}(\sigma - 1) \leq r + 1$ *für ein* $\sigma \in G$ *mit* $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$.

Beweis. Zunächst sehen wir mit Lemma 3.5, daß alle Voraussetzungen erhalten bleiben, wenn man Λ, R und M mit dem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K tensoriert. Die Behauptungen des Satzes übertragen sich dann auch wieder zurück auf die Situation über K. Wir können daher annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist. Außerdem ist r ohne Einschränkung minimal mit $r > 0$ und $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M) \neq 0$.

Wir nehmen an, daß $\dim(R/P) > r+1$ für alle minimalen $P \in \operatorname{Spec}(R)$ und $\operatorname{rk}(\sigma - 1) > r+1$ für alle $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$ gilt. Es gilt $\dim(R^G) = \dim(R) > r+1$, also existiert ein maximales Ideal $I \subset R^G$ mit $\operatorname{ht}(I) > r+1$. Nun können wir Lemma 3.3 anwenden und erhalten Einbettungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r+2}\colon \Lambda \hookrightarrow R$, so daß für die Invarianten $a_i := \sum_{\sigma \in G} \varphi(i)(\sigma)$ gilt: $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_{r+2}) = r+2$. Es sei $0 \neq \alpha \in \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$. Elemente von $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ werden durch Λ-Homomorphismen $P_r \to M$ gegeben, wobei P_r der r-te Modul aus einer projektiven Auflösung von K ist. Das Bild eines solchen Homomorphismus liegt in einem endlich erzeugten Untermodul. Also existiert ein endlich erzeugter Untermodul $V \subset M$, so daß α im Bild von $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, V) \to \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ liegt. Die Λ-Homomorphismen

$$\psi_i\colon \Lambda \otimes V \to M,\ w \otimes v \mapsto \varphi_i(w) \cdot v$$

induzieren Abbildungen $\widetilde{\psi}_i\colon \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, \Lambda \otimes V) \to \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$, und $a_i \cdot \alpha$ ist ein Bild unter $\widetilde{\psi}_i$. Nach Benson [3, Proposition 3.1.5] ist aber $\Lambda \otimes V$ projektiv, also $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, \Lambda \otimes V) = 0$. Es folgt $a_i \cdot \alpha = 0$, also

$$(a_1, \ldots, a_{r+2}) \subseteq \operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha).$$

Wegen Proposition 1.13 ist $R^G \subseteq R$ eine Erweiterung mit Abstiegseigenschaft, also ist Korollar 1.18 anwendbar und besagt, daß $\operatorname{ht}(\operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha)) \leq r+1$, im Widerspruch zu $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_{r+2}) = r+2$. □

Um eine weniger aufwendige Notation zu erhalten, notieren wir einen wichtigen Spezialfall.

Korollar 3.7. *Es seien G eine endliche Gruppe, K ein Körper und V und W endlich erzeugte KG-Moduln, wobei V treu sei. Weiter sei $M = S(V^*) \otimes W$, und der Modul M^G der Äquivarianten sei Cohen-Macaulay. Dann folgt aus $H^r(G, M) \neq 0$ für ein $r > 0$, daß $\dim_K(V^\sigma) \geq \dim_K(V) - r - 1$ für ein $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$ gilt.*

Beweis. M ist als freier Modul über einem Polynomring Cohen-Macaulay (siehe Bruns und Herzog [11, Theorem 2.1.9]), und nach Anmerkung 3.2 gilt $\operatorname{rk}(\sigma - 1) = \operatorname{codim}_V(V^\sigma) > 0$ für $1 \neq \sigma \in G$, da G treu operiert. Wegen Korollar 3.4 gilt $\operatorname{Ann}_{S(V^*)^G}(M^G) = 0$. Nach Satz 3.6 folgt $\dim_K(V) = \dim(S(V^*)) \leq r+1$ oder $\dim_K(V) - \dim_K(V^\sigma) \leq r+1$ für ein $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$. Im ersten Fall folgt $\dim_K(V) - \dim_K(V^\sigma) \leq r+1$ für alle $\sigma \in G$, und da es wegen $H^r(G, M) \neq 0$ Elemente $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$ gibt, haben wir in jedem Fall $\dim_K(V^\sigma) \geq \dim_K(V) - r - 1$ für ein σ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{char}(K)$. □

3.2 Vektorinvarianten

Ein klassisches Thema in der Invariantentheorie ist die Untersuchung von „Vektorinvarianten", d.h. Invarianten in $S(V^n)$, wo V^n die direkte Summe von n Kopien eines KG-Moduls V ist. Man versucht, Eigenschaften von $S(V^n)^G$ auf solche von $S(V)^G$ zurückzuführen. Einige Resultate und Referenzen hierzu finden sich in Smith [64, Abschnitt 3.4]. In der modularen Invariantentheorie haben Vektorinvarianten als Quelle von Gegenbeispielen oder „Negativresultaten" gedient (siehe z.B. Richman [59], Kemper [36]). Wegen $S(U \oplus V) = S(U) \otimes_K S(V)$ betrachten wir jetzt allgemeiner Invarianten von $R^{\otimes n}$, dem Tensorprodukt von n Kopien einer K-Algebra R. Wir benötigen das folgende Lemma, das ich nicht in der Literatur gefunden habe.

Lemma 3.8. *Es seien R und S zwei endlich erzeugte Algebren über einem Körper K. Sind R und S Cohen-Macaulay, so auch $R \otimes_K S$.*

Beweis. Nach Lemma 3.5 sind auch $\bar{R} := \bar{K} \otimes_K R$ und $\bar{S} := \bar{K} \otimes_K S$ Cohen-Macaulay, wobei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K sei. Wenn gezeigt ist, daß $\bar{R} \otimes_{\bar{K}} \bar{S} \cong \bar{K} \otimes_K R \otimes_K S$ Cohen-Macaulay ist, so gilt dies nach Bruns und Herzog [11, Theorem 2.1.10] auch für $R \otimes_K S$. Wir können also annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist.

Da R und S endlich erzeugte Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper sind, ist die Abbildung

$$\mathrm{Spec}_{\max}(R \otimes S) \to \mathrm{Spec}_{\max}(R) \times \mathrm{Spec}_{\max}(S),\ I \mapsto (I \cap R, I \cap S)$$

bijektiv, mit der inversen Abbildung $(P, Q) \mapsto (P \otimes 1, 1 \otimes Q)R \otimes S$. Es sei $P \in \mathrm{Spec}_{\max}(R)$ und $Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(S)$. Dann existiert eine R-reguläre Sequenz $a_1, \ldots, a_d \in P$ mit $d = \mathrm{ht}(P)$ und eine S-reguläre Sequenz $b_1, \ldots, b_e \in Q$ mit $e = \mathrm{ht}(Q)$. Für $1 \le i \le d$ ist a_i kein Nullteiler auf $R/(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Wegen

$$R/(a_1, \ldots, a_{i-1}) \otimes S \cong (R \otimes S)/(a_1 \otimes 1, \ldots, a_{i-1} \otimes 1) =: M_{i-1}$$

ist M_{i-1} ein freier Modul über $R/(a_1, \ldots, a_{i-1})$, also ist $a_i \otimes 1$ kein Nullteiler auf M_{i-1}. Ebenso ist

$$R/(a_1, \ldots, a_d) \otimes S/(b_1, \ldots, b_{j-1}) \cong (R \otimes S)/(a_1 \otimes 1, \ldots, a_d \otimes 1, 1 \otimes b_1, \ldots, 1 \otimes b_{j-1}) =: N_{j-1},$$

also ist $1 \otimes b_j$ für $1 \le j \le e$ kein Nullteiler auf N_{j-1}. Wir haben also eine $(R \otimes S)$-reguläre Sequenz der Länge $d + e$ in $I := (P \otimes 1, 1 \otimes Q)R \otimes S$ gefunden. Der Beweis ist abgeschlossen, wenn wir $\mathrm{ht}(I) = d + e$ zeigen können. Wir zerlegen $\mathrm{Spec}_{\max}(R)$ (versehen mit der Zariski-Topologie) in irreduzible Komponenten:

$$\mathrm{Spec}_{\max}(R) = U_1 \cup \cdots \cup U_r.$$

Dann ist $d = \max\{\dim(U_i) \mid P \in U_i\}$, und entsprechend $e = \max\{\dim(V_j) \mid Q \in V_j\}$, wobei $V_1, \ldots, V_s$ die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}_{\max}(S)$ seien. Es gilt

$$\mathrm{Spec}_{\max}(R \otimes S) \cong \bigcup_{i,j} (U_i \times V_j),$$

und die $U_i \times V_j$ sind nach Hartshorne [27, Kap. I, Exercise 3.15] irreduzibel mit $\dim(U_i \times V_j) = \dim(U_i) + \dim(V_i)$. Es folgt in der Tat $\mathrm{ht}(I) = d + e$. □

Jetzt können wir ein Resultat über Invarianten von Tensorpotenzen beweisen, das im Spezialfall $R = S(V)$ ein Resultat über Vektorinvarianten wird.

Satz 3.9. *Eine endliche Gruppe G operiere durch Algebren-Automorphismen auf einer endlich erzeugten Algebra R über einem Körper K. R sei Cohen-Macaulay,* $\dim(R/P) > 0$ *für jedes minimale Primideal $P \subset R$, und $K \cdot 1_R$ sei ein direkter Summand von R als KG-Modul. Außerdem sei* $\mathrm{rk}(\sigma - 1) > 0$ *für $1 \ne \sigma \in G$, und $|G|$ sei ein Vielfaches der Charakteristik von K. Dann gibt es ein $m > 0$, so daß $(R^{\otimes n})^G$ nicht Cohen-Macaulay ist für $n \ge m$. Dabei ist $R^{\otimes n}$ das Tensorprodukt über K von n Kopien von R.*

Anmerkung 3.10. Die Voraussetzung, daß K ein direkter Summand von R als KG-Modul sei, ist beispielsweise dann erfüllt, wenn R ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ als K-Algebra hat, so daß das Ideal $I := (x_1, \ldots, x_n)R$ echt ist und $\sigma(x_i) \in I$ für alle $\sigma \in G$, $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere ist die Voraussetzung für $R = S(V)$, V ein endlich erzeugter KG-Modul, erfüllt.

Beweis. Ist $\bar{K}$ der algebraische Abschluß von K, so ist $\bar{K} \otimes_K R$ nach Lemma 3.5 Cohen-Macaulay, und wenn gezeigt ist, daß $\bar{K} \otimes_K (R^{\otimes n})^G$ nicht Cohen-Macaulay ist, dann gilt dies nach Bruns und Herzog [11, Theorem 2.1.10] auch für $(R^{\otimes n})^G$. Wir können also annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist. Nach Lemma 3.8 ist $R^{\otimes n}$ Cohen-Macaulay. Im Beweis zu Lemma 3.8 haben wir gesehen, daß die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}_{\max}(R^{\otimes n})$ Produkte von irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Spec}_{\max}(R)$ sind und daß sich die Höhen addieren, also gilt $\dim(R^{\otimes n}/P) \ge n$ für jedes minimale Primideal P von $R^{\otimes n}$. Außerdem ist $I_\sigma := (\sigma - 1)R^{\otimes n} \cdot R^{\otimes n}$ für $\sigma \in G$ das n-fache Tensorprodukt von $(\sigma - 1)R \cdot R$ (siehe Anmerkung 3.2), die durch I_σ gegebene Teilmenge von $\mathrm{Spec}_{\max}(R^{\otimes n})$ ist also das n-fache Produkt der von $(\sigma - 1)R \cdot R$ gegebenen Teilmenge von $\mathrm{Spec}_{\max}(R)$. Es folgt $\mathrm{rk}_{R^{\otimes n}}(\sigma - 1) = \mathrm{ht}(I_\sigma) = n \cdot \mathrm{rk}_R(\sigma - 1) \ge n$ für $\sigma \ne 1$.

Nach Benson [4, Theorem 4.1.3] existiert ein $r > 0$, so daß $H^r(G, K) \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $H^r(G, K)$ in $H^r(G, R^{\otimes n})$ eingebettet, also $H^r(G, R^{\otimes n}) \neq 0$. Ist $(R^{\otimes n})^G$ Cohen-Macaulay, so folgt mit Satz 3.6, daß $\dim(R^{\otimes n}/P) \leq r+1$ für ein minimales Primideal P oder $\mathrm{rk}_{R^{\otimes n}}(\sigma-1) \leq r+1$ für ein $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{char}(K)$ ist. Nach Obigem kann das aber nur für $n \leq r+1$ gelten. Die Behauptung gilt also mit $m = r+2$. □

Die „Drei-Kopien“ Vermutung.

Anmerkung. Falls G in der Situation von Satz 3.9 einen Normalteiler von Index $p := \mathrm{char}(K)$ hat, so existiert ein nicht-trivialer Gruppenhomomorphismus von G in die additive Gruppe von K, also $H^1(G, K) \neq 0$. Nach dem Beweis folgt dann, daß $(R^{\otimes 3})^G$ nicht Cohen-Macaulay ist. Dies verallgemeinert das Resultat von Campbell et al. [14], daß $S(V^3)^G$ nicht Cohen-Macaulay ist, falls G eine p-Gruppe ist.

Beispiel 3.11. Wir betrachten einige Beispiele von linearen Gruppen, die keinen Normalteiler von Index p haben, aber bei denen sich $S(V^3)^G$ trotzdem als nicht Cohen-Macaulay herausstellt.

(a) Es seien $p \neq 2$ eine Primzahl, $G = S_p$ oder A_p und V der natürliche Permutationsmodul über einem Körper der Charakteristik p. Der Normalisator einer Untergruppe der Ordnung p hat eine durch $p(p-1)$ teilbare Ordnung. Aus dem Beweis von Theorem 4.1.3 in Benson [4] folgt, daß $H^r(G, K) \neq 0$ für ein $r \leq 2(p-1)$ gilt. Für $m > 0$ sei $R_m := S(V^m)$. Da K als direkter Summand in R_m auftritt, gilt auch $H^r(G, R_m) \neq 0$. Andererseits gilt $\dim_K((V^m)^\sigma) = m$ für jedes $\sigma \in G$ der Ordnung p. Falls R_m^G Cohen-Macaulay ist, so folgt aus Korollar 3.7 die Ungleichung $(m-2)(p-1) \leq 1$, also ist R_m^G für $m \geq 3$ nicht Cohen-Macaulay.

(b) Es seien $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ und $V = \mathbb{F}_3^2$ der „natürliche“ KG-Modul. Wir betrachten den Invariantenring in $R := S(V^3)$. Eine 3-Sylowgruppe P von G hat die Ordnung 3, also ist $H := \mathcal{N}_G(P) \leq G$ stark p-eingebettet ($p = 3$). Nach Satz 1.23 ist R^G genau dann Cohen-Macaulay, falls dies für R^H gilt. Der Invariantenring R^H läßt mit dem Invariantentheorie-Paket in MAGMA (siehe Kemper und Steel [45], Bosma et al. [8]) berechnen, und die Cohen-Macaulay-Eigenschaft läßt sich dann mit Hilfe der Anzahl von Sekundärinvarianten testen. Als Ergebnis ergibt sich, daß R^H und damit R^G nicht Cohen-Macaulay ist. Die Rechenzeit betrug auf einer Sun Ultrasparc Maschine etwa 7 Minuten.

Aufgrund dieser und anderer Beispiele formulieren wir die folgende Vermutung.

Vermutung 3.12. *Es sei G eine endliche Gruppe mit einer treuen Darstellung V über einem Körper, dessen Charakteristik die Gruppenordnung teilt. Dann ist $S(V^3)^G$ nicht Cohen-Macaulay.*

3.3 Permutationsgruppen

Die reguläre Darstellung. Wir betrachten jetzt Invarianten der regulären Darstellung einer Gruppe G, also den Ring $S(\Lambda)^G$ mit $\Lambda = KG$. Das Ziel ist die Klassifikation aller Paare (G, K) einer endlichen Gruppe G und eines Körpers K, so daß $S(\Lambda)^G$ Cohen-Macaulay ist.

Lemma 3.13. *Es sei $\Lambda = KG$ der Gruppenring einer endlichen Gruppe über einem Körper K, so daß $|G|$ ein Vielfaches von $\mathrm{char}(K)$ ist. Dann ist $H^1(G, S(\Lambda)) \neq 0$.*

Beweis. $S(\Lambda)$ ist ein Polynomring in Unbestimmten x_σ, $\sigma \in G$, mit $\tau(x_\sigma) = x_{\tau\sigma}$ für $\tau \in G$. $H \leq G$ sei eine Untergruppe der Ordnung $p := \mathrm{char}(K)$. Dann hat das Monom $t := \prod_{\sigma \in H} x_\sigma$ genau die Fixgruppe H, der von t erzeugte KG-Untermodul $M \subseteq S(\Lambda)$ ist also isomorph zum hochinduzierten trivialen Modul von H: $M \cong KG \otimes_{KH} K$. Nach dem Lemma von Eckmann und Shapiro (siehe Benson [3, Corollary 2.8.4]) folgt

$$H^1(G, M) \cong H^1(H, K) \neq 0.$$

Da G die Monome in $S(\Lambda)$ permutiert, ist jedes K-Erzeugnis einer G-Bahn eines Monoms ein direkter Summand von $S(\Lambda)$. Insbesondere ist also M ein direkter Summand, und die Behauptung folgt. □

Satz 3.14. *Es seien G eine endliche Gruppe, K ein Körper und $\Lambda = KG$ der Gruppenring. Dann sind äquivalent:*

(a) $S(\Lambda)^G$ *ist Cohen-Macaulay;*

(b) $\operatorname{char}(K) \nmid |G|$ *oder* $G \in \{Z_2, Z_3, Z_2 \times Z_2\}$.

Beweis. $S(\Lambda)^G$ sei Cohen-Macaulay, und $|G|$ sei ein Vielfaches von $p := \operatorname{char}(K)$. Dann gilt $H^1(G, S(\Lambda)) \neq 0$ nach Lemma 3.13, und aus Korollar 3.7 folgt $\dim(\Lambda^\sigma) \geq |G| - 2$ für ein $\sigma \in G$ mit $\operatorname{ord}(\sigma) = p$. Jedes solche σ operiert jedoch durch $|G|/p$ Zyklen der Länge p, also $\dim(\Lambda^\sigma) = |G|/p$. Wir erhalten $|G|/p \geq |G| - 2$, woraus $|G| \leq 4$ folgt. Wir müssen also zeigen, daß G nicht isomorph zu Z_4 sein kann. Es folgt aber nach Bertin [7] oder aus Satz 4.11 in dieser Arbeit, daß $S(\Lambda)^G$ für $G = Z_4$ und $\operatorname{char}(K) = 2$ nicht Cohen-Macaulay ist.

Falls umgekehrt $p \nmid |G|$ gilt, so ist $S(\Lambda)^G$ nach Hochster und Eagon [28] Cohen-Macaulay. Ist $G \in \{Z_2, Z_3\}$, so folgt nach Ellingsrud und Skjelbred [19] (siehe die Gleichung (4.6) auf S. 47), daß $S(\Lambda)^G$ Cohen-Macaulay ist, da $\dim_K(\Lambda) \leq 3$. Im Fall $G = Z_2 \times Z_2$ wurde der Invariantenring von Adem und Milgram [1, Kap. III, Corollary 1.8] bestimmt. Man kann dies auch leicht mit dem INVAR-Paket in MAPLE (siehe Kemper [35], Char et al. [16]) oder MAGMA tun. Das Ergebnis ist ein Cohen-Macaulay Ring. □

Anmerkung. Glassbrenner [24] hat gezeigt, daß für zyklische Gruppen $G = Z_n$ mit $n > 4$ und $\operatorname{char}(K) \mid n$ der Invariantenring der regulären Darstellung nicht Cohen-Macaulay ist. Dieses Resultat ist in Satz 3.14 enthalten.

Beispiel 3.15. Für die symmetrische Gruppe $G = S_3$ und $\operatorname{char}(K) = 3$ kann man den Invariantenring $S(\Lambda)^G$ des regulären Moduls $\Lambda = KG$ leicht mit MAGMA ausrechnen. Man erhält ein minimales Erzeugendensystem von $S(\Lambda)^G$ aus 23 homogenen Invarianten, deren maximaler Grad 8 ist. Außerdem ergibt die Rechnung in Übereinstimmung mit Satz 3.14, daß $S(\Lambda)^G$ nicht Cohen-Macaulay ist. Genauer erhält man für die Tiefe

$$\operatorname{depth}\left(S(\Lambda)^G\right) = 4.$$

Im Falle eines Cohen-Macaulay Rings wäre diese Tiefe gleich $\operatorname{ht}(S(\Lambda)^G_+, S(\Lambda)^G) = 6$. Die gesamte Rechnung nimmt auf einer Sun Ultrasparc Maschine 93 Sekunden in Anspruch.

Darstellungen von Permutationsgruppen. Es folgen weitere Anwendungen von Korollar 3.7.

Proposition 3.16. *G operiere als treue, transitive Permutationsgruppe auf einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ eines Vektorraums W über einem Körper K der Charakteristik p mit $p \mid n$. Es seien*

$$V = \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in W \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\} \subset W \quad \text{und} \quad U = V / K \cdot (e_1 + \cdots + e_n)\,.$$

Dann gelten:

(a) Falls jedes Element der Ordnung p von G mindestens $9 - p$ der e_i bewegt (dies gilt für $p \geq 5$ immer), so ist $S(V)^G$ nicht Cohen-Macaulay.

(b) Falls $p \geq 5$ und $n > 5$, so ist $S(U)^G$ nicht Cohen-Macaulay.

(c) Falls $p = 3$ und $n > 6$ ist und jedes Element der Ordnung 3 mindestens 6 der e_i bewegt, so ist $S(U)^G$ nicht Cohen-Macaulay.

Beweis. Wir zeigen zunächst $H^1(G,V) \neq 0$ und $H^1(G,U) \neq 0$ (letzteres für $p > 2$). Man betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

mit $\pi(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Wegen der Transitivität von G hat jeder invariante Vektor $w \in W^G$ lauter gleiche Koeffizienten, also $\pi(w) = 0$, da $p|n$. Damit zerfällt die Sequenz (3.1) nicht, und $H^1(G,V) \neq 0$ ist gezeigt. Mit $W_0 = W/K \cdot (e_1 + \cdots + e_n)$ haben wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow W_0 \xrightarrow{\pi_0} K \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

mit π_0 von π induziert. Sei $w = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n \in W$, so daß $w_0 := w + K \cdot (e_1 + \cdots + e_n) \in W_0^G$. Für $\sigma \in G$ ist dann $(\sigma - 1)w = \varphi(\sigma) \cdot (e_1 + \cdots + e_n)$ mit $\varphi(\sigma) \in K$. Dies definiert einen Homomorphismus φ von G in die additive Gruppe von K. Für $\sigma \in G$ gilt

$$\alpha_1 \sigma(e_1) + \cdots + \alpha_n \sigma(e_n) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n + \varphi(\sigma) \cdot (e_1 + \cdots + e_n),$$

also $\alpha_i = \alpha_1 + \varphi(\sigma)$, falls $\sigma^{-1}(e_1) = e_i$. Insbesondere liegt die Fixgruppe G_1 von e_1 in $N := \mathrm{Kern}(\varphi)$. Wir wählen Rechts-Nebenklassenvertreter $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ von G_1 in G. Dann gilt im Falle $p > 2$

$$\pi_0(w_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_1 + \varphi(\sigma_i)) = n\alpha_1 + [N : G_1] \cdot \sum_{\sigma \in G/N} \varphi(\sigma) = 0 + 0 = 0,$$

da die Summe über eine endliche additive Untergruppe eines Körpers der Charakteristik $p > 2$ Null ist. Also zerfällt auch die Sequenz (3.2) nicht, und wir haben $H^1(G,U) \neq 0$ für $p > 2$.

Wegen Korollar 3.7 sind wir fertig, wenn wir für jedes $\sigma \in G$ der Ordnung p zeigen können, daß $\mathrm{rk}(\sigma - 1) > 2$. Bis auf die Numerierung enthält die Darstellung eines solchen σ durch elementfremde Zyklen den Zyklus $(1, 2, \ldots, p)$. Für $p \geq 5$ sind die Vektoren

$$(\sigma - 1)(e_2 - e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3,\ (\sigma - 1)(e_3 - e_2) = e_2 - 2e_3 + e_4,\ (\sigma - 1)(e_4 - e_3) = e_3 - 2e_4 + e_5$$

linear unabhängig, und im Falle $n > 5$ ist auch die Vereinigung dieser Vektoren mit $e_1 + \cdots + e_n$ linear unabhängig. Es folgen die Aussagen (b) und (a) im Falle $p \geq 5$. Ist $p = 3$, so enthält σ nach Voraussetzung die Zyklen $(1,2,3)(4,5,6)$. Also sind

$$(\sigma - 1)(e_2 - e_1) = e_1 + e_2 + e_3,\ (\sigma - 1)(e_5 - e_4) = e_4 + e_5 + e_6,\ (\sigma - 1)(e_4 - e_1) = e_1 - e_2 - e_4 + e_5$$

linear unabhängig, und für $n > 6$ kann man noch $e_1 + \cdots + e_n$ hinzunehmen. Dies zeigt (c) und (a) für $p = 3$. Für $p = 2$ hat man die Zyklen $(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)$ und verifiziert die lineare Unabhängigkeit von $(\sigma - 1)(e_1 + e_3)$, $(\sigma - 1)(e_1 + e_5)$ und $(\sigma - 1)(e_1 + e_7)$. □

Beispiel 3.17. Es sei $p := \mathrm{char}(K) \geq 5$ und n ein Vielfaches von p. Dann erfüllt die symmetrische Gruppe $G = S_n$ die Voraussetzungen von Proposition 3.16(a) und von Proposition 3.16(b) falls $n > 5$. Mit der Notation von Proposition 3.16 folgt, daß $S(V)^G$ und $S(U)^G$ (falls $n > 5$) nicht Cohen-Macaulay sind. Dies ist aus mehreren Gründen bemerkenswert:

(1) G operiert auf U und V als Spiegelungsgruppe. Somit haben wir zwei unendliche Serien von endlichen Spiegelungsgruppen gefunden, deren Invariantenringe nicht nur keine Polynomringe, sondern nicht einmal Cohen-Macaulay sind. Eine weitere solche Serie, die aus abelschen p-Gruppen besteht, wurde von Nakajima [54] angegeben (siehe Beispiel 4.14).

(2) Bei den U handelt es sich um irreduzible KG-Moduln (was bei Nakajimas Serie nicht der Fall ist).

(3) Die Invariantenkörper aller endlichen irreduziblen Spiegelungsgruppen wurden von Kemper und Malle [43] untersucht, mit dem Ergebnis, daß sie sämtlich rationale Funktionenkörper sind (d.h. es wurden positive Antworten auf das Noethersche Problem gefunden). Somit sind die $S(U)^G$ für $n > 5$ nicht Cohen-Macaulay, obwohl ihre Quotientenkörper rationale Funktionenkörper sind.

(4) Die Darstellung von G auf V ist die Reduktion modulo p einer Spiegelungsdarstellung von G über $\mathbb{Q}$.

(5) V ist der duale Modul von $W_0 := W/K \cdot (e_1 + \cdots + e_n)$. Der Invariantenring $S(W_0)^G$ ist aber ein Polynomring, erzeugt von den Bildern der elementarsymmetrischen Polynome $s_i(e_1, \ldots, e_n)$ $(i = 2, \ldots, n)$. Wir haben also einen KG-Modul V, so daß $S(V^*)^G$ ein Polynomring ist, aber $S(V)^G$ nicht einmal Cohen-Macaulay ist.

Für $p = 3$ und $G = S_n$ mit $3 \mid n$ ist Proposition 3.16 nicht anwendbar, um zu zeigen, daß $S(U)^G$ nicht Cohen-Macaulay ist. In der Tat stellt sich für $G = S_6$ durch Berechnung des Invariantenrings $S(U)^G$ mit MAGMA heraus, daß dieser Cohen-Macaulay ist. Es gilt sogar, daß $S(U)^G$ eine Hyperfläche ist (siehe Kemper und Malle [44]), erzeugt von homogenen Invarianten von Graden 2,4,10,15 und 18. Die Rechenzeit für dieses Beispiel betrug etwa 15 Minuten.

Invariantentheoretische Herleitung von Resultaten aus der Gruppentheorie. Das folgende Beispiel zeigt, wie man Korollar 3.7 benutzen kann, um aus einfachen Resultaten aus der Invariantentheorie nicht-triviale Schlüsse über Gruppenkohomologie zu ziehen.

Beispiel 3.18. Es seien $G = S_n$ oder $G = A_n$ die symmetrische oder die alternierende Gruppe auf n Ziffern, und V der natürliche Permutationsmodul. Wir setzen $p := \mathrm{char}(K) > 2$ voraus (aber nicht $p \mid n$). Im Falle $G = S_n$ ist $S(V)^G$ bekanntlich ein Polynomring, und im Falle $G = A_n$ die direkte Summe von zwei Polynomringen (siehe Smith [64, Corollary 1.3.2]). In jedem Fall ist $S(V)^G$ also Cohen-Macaulay. Ein Element $\sigma \in G$ der Ordnung p hat $\mathrm{rk}(\sigma - 1) \geq p - 1$, also folgt aus Korollar 3.7, daß $H^r(G, S(V)) = 0$ für $0 < r < p - 2$. Insbesondere haben wir $H^r(G, K) = 0$ für diese r. Somit wird die Tatsache, daß S_n und A_n keine nicht-zerfallenden zentralen Erweiterungen mit einem Kern der Ordnung $p \geq 5$ besitzen (siehe Huppert [32, Kap. V, Satz 25.12], Gorenstein et al. [25, Theorem 5.2.3]), zu einer einfachen Folge von Korollar 3.7.

4 Geometrische Untersuchungen

Die Ergebnisse von Abschnitt 1, insbesondere Korollar 1.18 zeigen, daß Annullatoren von Elementen in $\operatorname{Ext}_\Lambda^r(K, M)$ eine wichtige Rolle für die Cohen-Macaulay-Eigenschaft spielen. Es ist interessant, solche Annullatoren und die davon erzeugten Varietäten in $\operatorname{Spec}(R^\Lambda)$ genau zu bestimmen. In den Abschnitten 2 und 3 konnte eine solche genaue Bestimmung nicht durchgeführt werden. Es wurden jeweils untere Schranken für Annullatoren angegeben, die groß genug waren, um das Fehlen der Cohen-Macaulay-Eigenschaft nachzuweisen. In diesem Abschnitt ist die genaue Bestimmung der durch $\operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha)$ gegebenen algebraischen Menge in $\operatorname{Spec}(R^G)$ das Ziel, und zwar nur in dem Fall, daß $\alpha \in H^1(G, K)$ liegt. Dies bedeutet eine drastische Einschränkung der durch Korollar 1.18 gegebenen Möglichkeiten. Es ist erstaunlich, daß sich damit trotzdem interessante Ergebnisse erzielen lassen (siehe z.B. Korollar 4.11).

4.1 Der relative Spurort

Als entscheidendes Hilfsmittel für die Bestimmung der durch $\operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha)$ gegebenen algebraischen Menge wird sich die relative Spurabbildung herausstellen. Wir benötigen zunächst noch etwas Notation.

Notation 4.1. Es seien R ein Ring, $X = \operatorname{Spec}(R)$ und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{V}_X(I) := \{P \in X \mid I \subseteq P\}$$

die durch I gegebene algebraische Menge. Ist σ ein Endomorphismus von R, so schreiben wir

$$X^\sigma := \mathcal{V}_X\left((\sigma - 1)R \cdot R\right)$$

(siehe Definition 3.1). Man beachte, daß dies nicht mit der Menge der Primideale P mit $\sigma(P) = P$ übereinstimmt. Falls R jedoch eine endlich erzeugte Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $K \subseteq R^\sigma$ ist, so liegt ein maximales Ideal $P \in \operatorname{Spec}_{\max}(R)$ wegen $R/P \cong K$ genau dann in X^σ, wenn $\sigma(P) = P$ gilt.

Ist G eine Gruppe, die durch Automorphismen auf R operiert, so schreiben wir

$$X/\!\!/G := \operatorname{Spec}(R^G) \quad \text{und } \pi_G\colon X \to X/\!\!/G,\ P \mapsto R^G \cap P$$

für den **algebraischen Quotienten** und den kanonischen Morphismus.

Ist $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index mit Links-Nebenklassenvertretern $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, so definieren wir die **relative Spurabbildung** (auch „relativer Transfer“) durch

$$\operatorname{tr}_{G/H} : R^H \to R^G,\ a \mapsto \sum_{i=1}^r \sigma_i(a).$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Vertreter σ_i. Wir schreiben auch $\operatorname{tr}_{G/\{1\}} = \operatorname{tr}_G$. Die relative Spurabbildung ist ein Homomorphismus von R^G-Moduln, das Bild ist also ein Ideal. Wir schreiben

$$(X/\!\!/G)_{\operatorname{tr}_{G/H}} = \mathcal{V}_{X/\!\!/G}\left(\operatorname{tr}_{G/H}(R^H)\right)$$

für den **relativen Spurort**. Man beachte, daß $(X/\!\!/G)_{\operatorname{tr}_{G/H}}$ leer ist, falls der Index $r = [G : H]$ in R invertierbar ist.

Für die Darstellung von Elementen in $H^1(G, R)$ benutzen wir die Standardauflösung (siehe Benson [3, Abschnitt 3.4]). Ein Element $\alpha \in H^1(G, R)$ wird also repräsentiert durch eine Funktion $G \to R,\ \sigma \mapsto \alpha_\sigma$ (die die Bedingung für einen 1-Kozyklus erfüllt), und $\alpha = 0$, falls es ein $b \in R$ gibt mit $\alpha_\sigma = (\sigma - 1)b$ für alle $\sigma \in G$.

Die Spurabbildung, meist in ihrer absoluten Form $\mathrm{tr}_{H/\{1\}}$, ist als modularer Ersatz des Reynolds-Operators von großem Interesse. In der Literatur gibt es einige Untersuchungen hierzu (Feshbach [21], Campbell et al. [13], Shank und Wehlau [62], Fleischmann [22]).

Proposition 4.2. *Mit der Notation 4.1 sei* $\alpha \in H^1(G, R)$ *und* $I = \mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha)$. *Dann gilt*

$$\bigcup_{\sigma \in G} \pi_G \left(X^\sigma \setminus \mathcal{V}_X(\alpha_\sigma) \right) \subseteq \mathcal{V}_{X/\!\!/G}(I).$$

Beweis. Es sei $Q \in X^\sigma \setminus \mathcal{V}_X(\alpha_\sigma)$ für ein $\sigma \in G$. Also gilt $(\sigma - 1)R \subseteq Q$ und $\alpha_\sigma \notin Q$. Wir müssen zeigen, daß $I \subseteq R^G \cap Q$. Sei also $x \in I$. Dann existiert $b \in R$ mit $x \cdot \alpha_\sigma = (\sigma - 1)b$, also $x \cdot \alpha_\sigma \in Q$ und damit $x \in Q$. □

Wir betrachten den Spezialfall, daß R eine Algebra über einem Körper $K \subseteq R^G$ ist und α im Bild des kanonischen Homomorphismus $H^1(G, K) \to H^1(G, R)$ liegt. Wegen $H^1(G, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K)$ (Homomorphismen in die additive Gruppe von K) läßt sich α durch einen Homomorphismus $\varphi\colon G \to K$ repräsentieren: $\alpha_\sigma = \varphi(\sigma)$. Den Kern von φ bezeichnen wir mit N. Dann besagt Proposition 4.2

$$\bigcup_{\sigma \in G \setminus N} \pi_G \left(X^\sigma \right) \subseteq \mathcal{V}_{X/\!\!/G} \left(\mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha) \right). \tag{4.1}$$

Proposition 4.3. *In der obigen Situation habe* N *einen endlichen Index in* G. *Dann gilt*

$$\mathcal{V}_{X/\!\!/G} \left(\mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha) \right) \subseteq (X/\!\!/G)_{\mathrm{tr}_{G/N}}.$$

Beweis. Wir zeigen $\mathrm{tr}_{G/N}(R^N) \subseteq \mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha)$. Es sei also $x = \mathrm{tr}_{G/N}(h)$ mit $h \in R^N$. Der Quotient G/N ist in die additive Gruppe von K eingebettet, muß also eine elementar abelsche p-Gruppe sein mit $p := \mathrm{char}(K)$ ($N = G$ im Falle $p = 0$). Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in G$ minimale Erzeuger von G/N. Dann gilt

$$x = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 0}^{p-1} \sigma_1^{i_1} \cdots \sigma_m^{i_m}(h) = (\sigma_1 - 1)^{p-1} \cdots (\sigma_m - 1)^{p-1}(h),$$

wobei wir die Polynomidentität $1 + X + \cdots + X^{p-1} = (X - 1)^{p-1}$ über K benutzt haben. Mit $\delta_j := \sigma_j - 1$ bilden wir

$$\widetilde{h} := \sum_{i=1}^{m} \varphi(\sigma_i) \cdot \left(\delta_1^{p-1} \cdots \delta_{i-1}^{p-1} \delta_i^{p-2} \delta_{i+1}^{p-1} \cdots \delta_m^{p-1}(h) \right).$$

Dann gilt $\delta_i(\widetilde{h}) = \varphi(\sigma_i) \cdot x$, da δ_i^p alle Elemente von R^N auf 0 abbildet. Es folgt $(\sigma - 1)\widetilde{h} = \varphi(\sigma) \cdot x$ für $\sigma \in G$, also liegt x tatsächlich in $\mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha)$. □

Wilde Verzweigung. Als nächsten Schritt möchten wir nachweisen, daß (unter gewissen Voraussetzungen)

$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{tr}_{G/N}} = \bigcup_{\sigma \in G \setminus N} \pi_G \left(X^\sigma \right)$$

gilt. Zusammen mit (4.1) und Proposition 4.3 liefert dies die angekündigte geometrische Charakterisierung des Annullators. Wir möchten den relativen Spurort in einer allgemeineren Situation berechnen. Hierfür brauchen wir noch eine Definition.

Definition 4.4. *Es seien* R *ein Ring und* G *eine endliche Gruppe, die durch Automorphismen auf* R *operiert. Für* $Q \in X = \mathrm{Spec}(R)$, *schreiben wir*

$$I_G(Q) := \{ \sigma \in G \mid Q \in X^\sigma \}.$$

$I_G(Q)$ heißt die **Trägheitsgruppe** *von Q und ist eine Untergruppe von G. Weiter sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann heißt $X/\!\!/H \to X/\!\!/G$* **wild verzweigt** *bei $Q \in X$, falls der Index $[I_G(Q) : I_H(Q)]$ in Q liegt, d.h. durch die Charakteristik von R/Q teilbar ist. Für $P \in X/\!\!/G$ heißt $X/\!\!/H \to X/\!\!/G$* **wild verzweigt** *bei P, falls $X/\!\!/H \to X/\!\!/G$ für alle $Q \in X$ mit $\pi_G(Q) = P$ wild verzweigt bei Q ist. Wir schreiben*

$$(X/\!\!/G)_{X/\!\!/H-\mathrm{wr}} = \{P \in X/\!\!/G \mid X/\!\!/H \to X/\!\!/G \text{ ist wild verzweigt bei } P\}$$

und nennen dies den **wilden Verzweigungsort** *von $X/\!\!/H \to X/\!\!/G$.*

Anmerkung. Unser Begriff von wilder Verzweigung weicht von dem in der Zahlentheorie gängigen ab. Dort wird nur gefordert, daß *mindestens ein* Q mit $\pi_G(Q) = P$ wild verzweigt ist.

Proposition 4.5. *Mit der Notation von Definition 4.4 seien R eine Algebra über einem Körper der Charakteristik p und $N \lhd G$ ein Normalteiler. Dann gilt*

$$(X/\!\!/G)_{X/\!\!/N-\mathrm{wr}} = \bigcup_{\substack{\sigma \in G, \\ \mathrm{ord}(\sigma N) = p}} \pi_G(X^\sigma).$$

Beweis. Es sei $P \in X/\!\!/G$ ein Primideal. Wegen des Aufstiegslemmas gibt es ein $Q \in X$ mit $\pi_G(Q) = P$, und wegen Lemma 1.14 operiert G transitiv auf der Menge aller dieser Q. Aus $I_G(\sigma(Q)) = \sigma I_G(Q)\sigma^{-1} =: {}^\sigma I_G(Q)$ folgt

$$\Big[I_G(\sigma(Q)) : I_H(\sigma(Q))\Big] = \big[I_G(Q) : I_{{}^{\sigma^{-1}}N}(Q)\big] = [I_G(Q) : I_N(Q)]\,.$$

P ist also genau dann wild verzweigt, wenn dies für Q gilt. Dies ist äquivalent dazu, daß ein $\sigma \in I_G(Q)$ existiert mit $\mathrm{ord}(\sigma N) = p$. Daraus folgt die Behauptung. □

Konstruierbare Mengen. Bevor wir die Gleichheit des relativen Spurorts und des wilden Verzweigungsorts für endlich erzeugte Algebren über einem Körper beweisen, benötigen wir noch einen kurzen Exkurs. Es sei R eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K. Eine Teilmenge $Y \subseteq X := \mathrm{Spec}(R)$ heißt **konstruierbar**, falls es Ideale $I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_n \subseteq R$ gibt, so daß

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{V}_X(I_i) \setminus \mathcal{V}_X(J_i))$$

(siehe Hartshorne [27, Kap. II, Exercise 3.18]). Die konstruierbaren Mengen bilden die kleinste Familie von Teilmengen von X, die die offenen Mengen enthält und abgeschlossen unter Bildung von Schnitten und Komplementen ist. Es seien $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K, $\bar{R} = \bar{K} \otimes_K R$, $\bar{I}_i = I_i\bar{R}$, und entsprechend seien $\bar{J}_i$ und damit $\bar{Y} \subseteq \bar{X} := \mathrm{Spec}(\bar{R})$ definiert. Das folgende Lemma impliziert, daß $\bar{Y}$ nur von Y und nicht von der Wahl der I_i und J_i abhängt.

Lemma 4.6. *Mit der obigen Notation seien Y und $Z \subseteq X$ konstruierbar. Dann sind äquivalent:*

(a) $Y \subseteq Z$;

(b) $\bar{Y} \subseteq \bar{Z}$;

(c) $\mathrm{Spec}_{\max}(R) \cap Y \subseteq \mathrm{Spec}_{\max}(R) \cap Z$.

Beweis. Es sei $Y = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{V}_X(I_i) \setminus \mathcal{V}_X(J_i))$. Als erstes zeigen wir, daß für $P \in X$ äquivalent sind:

(i) $P \in Y$;

(ii) P ist Durchschnitt von maximalen Idealen aus Y.

Daraus folgt dann die Äquivalenz von (a) und (c). Falls (i) oder (ii) zutrifft, so existiert ein i mit $J_i \not\subseteq P$. Durch Umnumerieren können wir erreichen, daß $\bigcap_{i=1}^k J_i \not\subseteq P$ und $J_{k+1}, \dots, J_n \subseteq P$. Es gebe eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Spec}_{\max}(R) \cap Y$ mit $\bigcap_{Q \in \mathcal{M}} Q = P$. Für $Q \in \mathcal{M}$ folgt dann $J_{k+1}, \dots, J_n \subseteq Q$, also $Q \in \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_X(I_i)$. Damit gilt $\bigcap_{i=1}^k I_i \subseteq Q$ für $Q \in \mathcal{M}$, also $\bigcap_{i=1}^k I_i \subseteq P$. Es folgt $P \in \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_X(I_i)$ und damit $P \in Y$.

Umgekehrt gelte $P \in Y$, und $\mathcal{M}$ sei die Menge aller maximalen Ideale $Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(R)$ mit $P \subseteq Q$ und $\bigcap_{i=1}^k J_i \not\subseteq Q$. Da R ein Jacobson-Ring ist, gilt

$$P = \bigcap_{\substack{Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(R), \\ P \subseteq Q}} Q = \bigcap_{Q \in \mathcal{M}} Q \cap \bigcap_{\substack{Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(R), \\ P, \bigcap_{i=1}^k J_i \subseteq Q}} Q = \bigcap_{Q \in \mathcal{M}} Q \cap \sqrt{P + \bigcap_{i=1}^k J_i}.$$

Wegen $\sqrt{P + \bigcap_{i=1}^k J_i} \not\subseteq P$ folgt $P = \bigcap_{Q \in \mathcal{M}} Q$. Aus $P \in Y$ folgt $\bigcap_{i=1}^k I_i \subseteq P \subseteq Q$ für $Q \in \mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \subseteq Y$.

Als nächstes zeigen wir die Äquivalenz der folgenden Aussagen für ein $P \in \mathrm{Spec}_{\max}(R)$:

(iii) $P \in Y$;

(iv) es existiert ein $Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(\bar{R}) \cap \bar{Y}$ mit $P \subseteq Q$;

(v) für alle $Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(\bar{R})$ mit $P \subseteq Q$ gilt $Q \in \bar{Y}$.

Unter Verwendung der Äquivalenz von (a) und (c) folgt hieraus die Äquivalenz von (a) und (b). Wie oben gibt es unter der Annahme (iii), (iv) oder (v) ein $k > 0$ mit $\bigcap_{i=1}^k J_i \not\subseteq P$ und $J_{k+1}, \dots, J_n \subseteq P$.

Es gelte (iii), und $Q \in \bar{X}$ sei irgendein maximales Ideal mit $P \subseteq Q$. Wegen der Maximalität von P folgt $P = R \cap Q$, also $J_i \not\subseteq Q$ für $i \le k$ und damit auch $\bar{J}_i \not\subseteq Q$ für diese i. Wegen $P \in Y$ existiert ein $i \le k$ mit $I_i \subseteq P$, also auch $\bar{I}_i \subseteq Q$, und $Q \in \bar{Y}$ folgt. Aus (iii) folgt also (v), und aus (v) folgt auch (iv).

Es gelte (iv), also existiert ein maximales Ideal $Q \in \bar{Y}$ mit $P \subseteq Q$. Es folgt $\bar{J}_{k+1}, \dots, \bar{J}_n \subseteq Q$, also liegt Q in einem $\mathcal{V}_{\bar{X}}(\bar{I}_i)$ für $i \le k$. Es folgt $I_i \subseteq R \cap Q = P$, also $P \in Y$. Damit ist das Lemma gezeigt. □

Bestimmung des relativen Spurorts. Wir beweisen nun für endlich erzeugte Algebren über einem Körper die Gleichheit des relativen Spurorts und des wilden Verzweigungsorts. Für den Spezialfall einer G-Operation auf einem Vektorraum V und $R = S(V^*)$ wurde das entsprechende Resultat für die Punkte von V (statt $\mathrm{Spec}(R)$) von Fleischmann [22] bewiesen. In einer anderen Richtung ist Fleischmanns Ergebnis jedoch allgemeiner, da er nicht nur einzelne Untergruppen $H \le G$ betrachtet, sondern Mengen von Untergruppen. Ähnliche Resultate sind auch in der Zahlentheorie bekannt (siehe Narkiewicz [55, Korollar zu Proposition 5.11]).

Satz 4.7. *R sei eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper. Eine endliche Gruppe G operiere auf R durch Automorphismen, und $H \le G$ sei eine Untergruppe. Dann gilt*

$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{tr}_{G/H}} = (X/\!\!/G)_{X/\!\!/H-\mathrm{wr}}.$$

Beweis. Es seien $P \in X/\!\!/G$ ein Primideal und $Q \in X$ mit $\pi(Q) = P$. Nach Lemma 1.14 operiert G transitiv auf der Urbildmenge von P unter π_G, und wir haben im Beweis zu Proposition 4.5 gesehen, daß

$$\left[I_G(\sigma(Q)) : I_H(\sigma(Q))\right] = \left[I_G(Q) : I_{\sigma^{-1}H}(Q)\right],$$

wobei ${}^{\sigma^{-1}}H = \sigma^{-1} H \sigma$. Daher ist die Gleichheit der Teilmengen

$$\begin{aligned} Y &:= \{Q \in X \mid \mathrm{tr}_{G/H}(R^H) \subseteq Q\} \quad \text{und} \\ Z &:= \{Q \in X \mid [I_G(Q) : I_{{}^\sigma H}(Q)] \in Q \ \forall \sigma \in G\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

zu zeigen. Im folgenden schreiben wir $\sum_{\sigma\in G/H}$ für die Summation über ein Links-Vertretersystem von G in H, und $\sum_{\sigma\in U\backslash G/H}$ für die Summation über ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $U\sigma H$. Man sieht leicht, daß für $f \in R^H$ gilt:

$$\mathrm{tr}_{G/H}(f) = \sum_{\sigma\in G/H} \sigma(f) = \sum_{\sigma\in I_G(Q)\backslash G/H} \; \sum_{\tau\in I_G(Q)/I_{\sigma H}(Q)} \tau\sigma(f).$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{tr}_{G/H}(f) \equiv \sum_{\sigma\in I_G(Q)\backslash G/H} [I_G(Q) : I_{\sigma H}(Q)] \cdot \sigma(f) \mod Q, \tag{4.3}$$

also die Inklusion $Z \subseteq Y$.

Für die Umkehrung benutzen wir, daß Y und Z konstruierbar sind. Für Y ist das klar, da Y Zariski-abgeschlossen ist. Für Z beachte man, daß für jede Untergruppe $U \subseteq G$ die Menge $\{Q \in X \mid I_G(Q) = U\}$ die Differenz von zwei Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von X ist, und daß Z eine endliche Vereinigung aus solchen Mengen ist. Nach Lemma 4.6 ist die Inklusion $Y \subseteq Z$ bewiesen, wenn (mit der dortigen Notation) für alle maximalen Ideale aus $\bar{Y}$ gezeigt ist, daß sie in $\bar{Z}$ liegen. $\bar{Y}$ und $\bar{Z}$ erhält man, indem man R mit $\bar{K}$ tensoriert und dann die Mengen gemäß (4.2) bildet. Insgesamt genügt es also, die Inklusion $Y \subseteq Z$ für maximale Ideale unter der Annahme, daß K algebraisch abgeschlossen sei, zu zeigen.

$K = \bar{K}$ hat zur Folge, daß für $Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(R)$

$$\{\sigma \in G \mid \sigma(Q) = Q\} = I_G(Q) \tag{4.4}$$

gilt. Es sei nun $Q \in \mathrm{Spec}_{\max}(R) \setminus Z$, es existiert also $\sigma \in G$ mit

$$[I_G(Q) : I_{\sigma H}(Q)] \notin Q. \tag{4.5}$$

Die Mengen $A := \{\rho(Q) \mid \rho \in H\sigma^{-1}I_G(Q)\}$ und $B := \{\rho(Q) \mid \rho \in G\setminus H\sigma^{-1}I_G(Q)\}$ sind wegen (4.4) disjunkt. Wäre $\cap_{Q''\in B}Q'' \subseteq \cup_{Q'\in A}Q'$, so würde folgen, daß $\cap_{Q''\in B}Q''$ in einem $Q' \in A$ enthalten ist, also $Q'' = Q'$ mit $Q'' \in B$ im Widerspruch zu $A \cap B = \emptyset$. Folglich existiert ein $h \in \cap_{Q''\in B}Q'' \setminus \cup_{Q'\in A}Q'$, also

$$\{\rho \in G \mid h \notin \rho(Q)\} = H\sigma^{-1}I_G(Q).$$

Mit $f := \prod_{\tau\in H} \tau(h) \in R^H$ gilt dann für $\rho \in G$:

$$\rho(f) \notin Q \quad\Longleftrightarrow\quad \rho \in I_G(Q)\sigma H.$$

Die Kongruenz (4.3) liefert nun mit (4.5)

$$\mathrm{tr}_{G/H}(f) \equiv [I_G(Q) : I_{\sigma H}(Q)] \cdot \sigma(f) \not\equiv 0 \mod Q.$$

Also liegt Q auch nicht in Y, und die zweite Inklusion ist gezeigt. □

Ich danke Peter Fleischmann, der mich auf einen Fehler im Beweis zu einer früheren Version von Satz 4.7 hingewiesen hat. Nun können wir die Bestimmung der durch $\mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha)$ gegebenen algebraischen Menge für $\alpha \in H^1(G, K)$ abschließen.

Korollar 4.8. *R sei eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K mit einer Operation einer endlichen Gruppe G durch Algebren-Automorphismen. Weiter seien $\alpha \in H^1(G, K)$ repräsentiert durch einen Homomorphismus $\varphi\colon G \to K$, N der Kern von φ und $I = \mathrm{Ann}_{R^G}(\bar{\alpha})$ der Annullator des Bildes von α unter der von $K \hookrightarrow K \cdot 1_R$ induzierten Abbildung $H^1(G, K) \to H^1(G, R)$. Dann gilt mit der Notation 4.1*

$$\mathcal{V}_{X/\!\!/G}(I) = \bigcup_{\sigma\in G\setminus N} \pi_G(X^\sigma).$$

Beweis. Dies folgt aus der Inklusion (4.1), Proposition 4.3, Satz 4.7 und Proposition 4.5. □

4.2 Die Rolle der Bireflexionen

In Verbindung mit Korollar 1.18 ergibt sich:

Satz 4.9. *Eine endliche Gruppe G operiere durch Automorphismen auf einer endlich erzeugten Algebra R über einem Körper K der Charakteristik p. R und R^G seien Cohen-Macaulay, und es gebe einen Normalteiler $N \lhd G$ mit p-elementar abelscher Faktorgruppe. Dann gilt*

$$\bigcup_{\sigma \in G \setminus N} X^\sigma = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N} X^\sigma.$$

Beweis. Wegen Lemma 3.5 können wir annehmen, daß K groß genug ist, damit es einen Homomorphismus $\varphi\colon G \to K$ in die additive Gruppe von K mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = N$ gibt. Dieser definiert ein Element in $H^1(G, K)$, dessen Bild in $H^1(G, R)$ mit α bezeichnet werde. Für $I := \mathrm{Ann}_{R^G}(\alpha)$ gilt nach Korollar 4.8

$$\mathcal{V}_{X/\!\!/G}(I) = \bigcup_{\sigma \in G \setminus N} \pi_G(X^\sigma).$$

Es sei $Q \in X^\sigma$ für $\sigma \in G \setminus (\mathrm{Bir}(G) \cup N)$. Wir müssen zeigen, daß $Q \in X^{\sigma'}$ mit $\sigma' \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N$ gilt. Wegen $\sigma \notin \mathrm{Bir}(G)$ ist $\mathrm{ht}(Q) > 2$. Für $P := \pi_G(Q)$ gilt wegen Proposition 1.15 $\mathrm{ht}(P) > 2$, und $P \in \mathcal{V}_{X/\!\!/G}(I)$. Korollar 1.18 liefert aber $\mathrm{ht}(P') \le 2$ für jedes $P' \in \mathrm{Ass}_{R^G}(I)$. Also gibt es ein $P' \in \pi_G(X^{\sigma'})$ mit $\sigma' \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N$, so daß $P' \subseteq P$. Sei $Q' \in X^{\sigma'}$ mit $\pi_G(Q') = P'$. Für $f \in Q'$ liegt $\prod_{\tau \in G} \tau(f)$ in $Q' \cap R^G = P' \subseteq Q$, also $f \in \tau^{-1}(Q)$ für ein $\tau \in G$. Mit dem Primvermeidungslemma folgt $Q' \subseteq \tau^{-1}(Q)$ für ein $\tau \in G$, also $\tau(Q') \subseteq Q$. Aber $\tau(Q') \in X^{\tau\sigma'\tau^{-1}}$ und $\tau\sigma'\tau^{-1} \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N$. Wegen $\tau(Q') \subseteq Q$ liegt auch Q in $X^{\tau\sigma'\tau^{-1}}$, was zu zeigen war. □

Es folgen sofort einige Korollare.

Korollar 4.10. *Eine endliche Gruppe G operiere durch Automorphismen auf einer endlich erzeugten Algebra R über einem Körper K der Charakteristik p. R sei Cohen-Macaulay, $K \cdot 1_R$ sei ein direkter Summand von R als KG-Modul (siehe Anmerkung 3.10), und es gebe einen Normalteiler $N \lhd G$ vom Index p, der alle Bireflexionen aus G enthält. Dann ist R^G nicht Cohen-Macaulay.*

Beweis. Wir nehmen an, daß R^G Cohen-Macaulay sei. Wegen Satz 4.9 gilt dann

$$\bigcup_{\sigma \in G \setminus N} X^\sigma = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N} X^\sigma.$$

Auf der rechten Seite steht dabei die leere Menge. Da K ein direkter Summand von R ist, gilt jedoch $X^\sigma \neq \emptyset$ für alle $\sigma \in G$, also steht auf der linken Seite eine nicht-leere Menge. Dies ergibt einen Widerspruch, also ist R^G entgegen der Annahme nicht Cohen-Macaulay. □

Korollar 4.11. *Eine endliche Gruppe G operiere durch Algebren-Automorphismen auf einer endlich erzeugten Algebra R über einem Körper K der Charakteristik p. R und R^G seien Cohen-Macaulay, und $K \cdot 1_R$ sei ein direkter Summand von R als KG-Modul. Dann gelten:*

(a) Falls G nilpotent ist, so wird die p-Sylowgruppe von G durch Bireflexionen erzeugt.

(b) Falls alle maximalen Normalteiler in G den Index p haben, so wird G durch Bireflexionen erzeugt.

Beweis. Die Menge $\mathrm{Bir}(G)$ der Bireflexionen erzeugt einen Normalteiler G_{Bir} von G. Falls dieser echt in G enthalten ist, so folgt unter der Annahme von (b) die Existenz eines Normalteilers $N \lhd G$ vom Index p mit $\mathrm{Bir}(G) \subseteq N$. Falls unter der Annahme von (a) die p-Sylowgruppe P nicht von Bireflexionen erzeugt wird, so ist der Index von G_{Bir} durch p teilbar, und die Existenz eines Normalteilers N vom Index p mit $\mathrm{Bir}(G) \subseteq N$ folgt aus der Nilpotenz. In beiden Fällen folgt aus Korollar 4.10, daß R^G nicht Cohen-Macaulay ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Annahme, daß G bzw. P nicht von Bireflexionen erzeugt wird, war also falsch. □

Anmerkung 4.12. (a) Kac und Watanabe [34] haben für endliche Gruppen $G \leq \mathrm{GL}(V)$ bewiesen, daß G von Bireflexionen erzeugt wird, falls $S(V)^G$ ein vollständiger Durchschnitt ist. Da ein vollständiger Durchschnitt immer Cohen-Macaulay ist (siehe Stanley [69]), haben wir das Ergebnis von Kac und Watanabe für den Fall von p-Gruppen erhalten, wobei $p = \mathrm{char}(K)$. Bemerkenswert und überraschend ist, daß in diesem Fall die viel schwächere Voraussetzung der Cohen-Macaulay-Eigenschaft genügt, um die Erzeugung durch Bireflexionen zu erzwingen.

(b) Ellingsrud und Skjelbred [19] haben für zyklische endliche p-Gruppen $G \leq \mathrm{GL}(V)$ die Tiefe von $S(V)^G$ berechnet. Das Ergebnis ist

$$\mathrm{depth}(S(V)^G) = \min\{\dim(V), \dim(V^G) + 2\}. \tag{4.6}$$

Demnach kann $S(V)^G$ nur Cohen-Macaulay sein, falls G von einer Bireflexion erzeugt wird. Auch dies ist ein Spezialfall von Korollar 4.11. Im Gegensatz zu Ellingsrud und Skjelbred erhalten wir jedoch keine Bestimmung der Tiefe. Ein elementarer Beweis der Formel (4.6) und eine Verallgemeinerung auf sogenannte flache (“*shallow*“) Gruppen (beispielsweise abelsche Gruppen mit zyklischer p-Sylowgruppe) findet sich in Campbell et al. [15].

Ist G eine zyklische p-Gruppe, so können wir mit (4.6) für jeden endlich erzeugten KG-Modul feststellen, ob $S(V)^G$ Cohen-Macaulay ist. Im folgenden Korollar geben wir eine größere Klasse von endlichen Gruppen an, für die dies möglich ist.

Korollar 4.13. *Es sei G eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq G$, so daß G/N eine zyklische p-Gruppe ist und $p \nmid |N|$ gilt. Weiter seien K ein Körper der Charakteristik p und V ein endlich erzeugter KG-Modul. Dann ist $S(V)^G$ genau dann Cohen-Macaulay, wenn G von N und den Bireflexionen aus G erzeugt wird, also $G = \langle N, \mathrm{Bir}(G)\rangle$.*

Beweis. Jede Zwischengruppe zwischen N und G ist ein Normalteiler in G, insbesondere also $H := \langle N, \mathrm{Bir}(G)\rangle$. Es sei $H \neq G$. Da G/H eine p-Gruppe ist, existiert ein Normalteiler $N' \lhd G$ von Index p mit $H \subseteq N'$, also $\mathrm{Bir}(G) \subseteq N'$. Nach Korollar 4.10 ist $S(V)^G$ also nicht Cohen-Macaulay.

Nun sei $H = G$. Dann existiert eine Bireflexion $\sigma \in \mathrm{Bir}(G)$ mit $G = \langle N, \sigma\rangle$, denn sonst lägen alle $\langle N, \sigma\rangle$ mit $\sigma \in \mathrm{Bir}(G)$ in der (eindeutig bestimmten) maximalen echten Zwischengruppe. Es sei $P = \langle \sigma^{|N|}\rangle$. Dann ist P eine zyklische Gruppe der Ordnung $|G/N|$ und wird durch eine Bireflexion erzeugt. Wegen (4.6) folgt, daß $S(V)^P$ Cohen-Macaulay ist, und wegen $p \nmid [G : P]$ liefert Proposition 1.21, daß auch $S(V)^G$ Cohen-Macaulay ist. □

Wir schließen den Abschnitt mit zwei Beispielen ab.

Beispiel 4.14. Nakajima [54] hat die folgenden Gruppen als Beispiele für Spiegelungsgruppen, deren Invariantenringe nicht Cohen-Macaulay sind, angegeben. Es seien q eine Primzahlpotenz und K ein Körper mit $\mathbb{F}_q \subseteq K$. Weiter seien $m \geq 3$, $n := 2m + 1$, und $G \leq \mathrm{GL}_n(K)$ sei definiert als die Gruppe aller $n \times n$-Matrizen von der Form

$$\sigma_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m} := \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ \hline \alpha_0 & \alpha_1 & & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \alpha_0 & & & \alpha_m & & & 1 \end{array}\right) \tag{4.7}$$

mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}_q$. G operiert als Spiegelungsgruppe auf $V := K^n$. Wir möchten Satz 4.9 benutzen, um zu zeigen, daß R^G mit $R := S(V^*)$ nicht Cohen-Macaulay ist. Wir bezeichnen die Dualbasis zur Standardbasis von V mit $x_0, \ldots, x_{2m} \in V^*$. Dann gilt

$$\sigma_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m}(x_i) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq m, \\ x_i - \alpha_0 x_0 - \alpha_{i-m} x_{i-m} & \text{falls } i > m. \end{cases}$$

Es sei $N \lhd G$ der Normalteiler bestehend aus allen Matrizen $\sigma_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m} \in G$ mit $\alpha_0 = 0$. Wäre R^G Cohen-Macaulay, so folgte mit Satz 4.9

$$\sqrt{\bigcap_{\sigma \in G \setminus N} (\sigma - 1)R \cdot R} = \sqrt{\bigcap_{\sigma \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N} (\sigma - 1)R \cdot R}. \tag{4.8}$$

Für $\sigma = \sigma_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m} \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N$ ist $\alpha_i = 0$ für ein i mit $1 \leq i \leq m$, und es folgt $(\sigma - 1)x_{m+i} = -\alpha_0 x_0$. Also liegt x_0 in allen $(\sigma - 1)R \cdot R$ mit $\sigma \in \mathrm{Bir}(G) \setminus N$. Andererseits sei $I := (\sigma_{1,\ldots,1} - 1)R \cdot R$. Da I nach Anmerkung 3.2 von den $(\sigma_{1,\ldots,1} - 1)x_i$ erzeugt wird, ist I das Primideal erzeugt von den $x_i + x_0$ mit $1 \leq i \leq m$, also $x_0 \notin I$. Dies steht im Widerspruch zu (4.8), also ist R^G in der Tat nicht Cohen-Macaulay.

Im folgenden Abschnitt werden wir den Nicht-Cohen-Macaulay Ort von $\mathrm{Spec}(R^G)$ ausrechnen (siehe Satz 5.17).

Beispiel 4.15. $G \leq S_n$ sei eine Permutationsgruppe mit den Eigenschaften

(i) $G \not\subseteq A_n$;

(ii) G enthält keine Transposition.

G operiert auf der Polynomalgebra $R := \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$ durch Permutationen der x_i. $N = G \cap A_n$ ist wegen (i) ein Normalteiler vom Index 2, und jede Bireflexion liegt wegen (ii) in N, da die Bireflexionen in Permutationsgruppen genau die Identität, Transpositionen, Doppeltranspositionen und Dreierzyklen sind. Nach Korollar 4.10 ist also R^G nicht Cohen-Macaulay. Dieses Resultat erscheint bei Broer [10, Corollary 3]. Es ist bemerkenswert, daß Broer auf ganz anderem Wege zu diesem Ergebnis gelangte, nämlich über das Betrachten der Hilbertreihe von R^G, die sich mit der Molienschen Formel berechnen läßt.

5 Der Nicht-Cohen-Macaulay Ort

Nach Definition ist ein endlich erzeugter Modul M über einem Noetherscher Ring R Cohen-Macaulay, falls für alle maximalen Ideale $P \in \operatorname{Spec}(R)$ die Lokalisierung M_P Cohen-Macaulay (über R_P) ist. Wenn dies der Fall ist, so ist M_P sogar für alle $P \in \operatorname{Spec}(R)$ Cohen-Macaulay (siehe Bruns und Herzog [11, Theorem 2.1.3(b)]). Die Menge aller Primideale $P \in \operatorname{Spec}(R)$, für die M_P nicht Cohen-Macaulay ist, mißt also in gewisser Weise die Abweichung von der Cohen-Macaulay-Eigenschaft.

5.1 Konstruierbarkeit des Nicht-Cohen-Macaulay Orts

Wir verfeinern den Begriff des Nicht-Cohen-Macaulay Orts noch ein wenig.

Definition 5.1. *Für einen Noetherschen lokalen oder graduierten Ring R und einen endlich erzeugten (graduierten) R-Modul M sei der* **Cohen-Macaulay-Defekt** *durch*

$$\operatorname{def}(M) = \dim(M) - \operatorname{depth}(M)$$

definiert. Ist R irgendein Noetherscher Ring, $X = \operatorname{Spec}(R)$ und M ein endlich erzeugter R-Modul, so schreiben wir für $m \geq 0$

$$X_{\operatorname{def}(M)\geq m} = \{P \in X \mid \operatorname{def}(M_P) \geq m\}.$$

Damit ist $X_{M-\mathrm{nCM}} := X_{\operatorname{def}(M)\geq 1}$ die Menge aller $P \in \operatorname{Spec}(R)$, so daß M_P nicht Cohen-Macaulay ist. Für $X_{R-\mathrm{nCM}}$ schreiben wir auch X_{nCM}, und $X_{\operatorname{def}\geq m} := X_{\operatorname{def}(R)\geq m}$. Wir nennen $X_{M-\mathrm{nCM}}$ den **Nicht-Cohen-Macaulay Ort**. *Somit erhalten wir eine Filtrierung*

$$X = X_{\operatorname{def}(M)\geq 0} \supseteq X_{M-\mathrm{nCM}} = X_{\operatorname{def}(M)\geq 1} \supseteq X_{\operatorname{def}(M)\geq 2} \supseteq \cdots .$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Untersuchung des Nicht-Cohen-Macaulay Orts von Invariantenringen. Zunächst möchten wir jedoch zeigen, daß die Mengen $X_{\operatorname{def}(M)\geq m}$ konstruierbar sind, falls R eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper ist. Dies wird im Beweis der oberen Schranke für $X_{\operatorname{def}\geq m}$ und in Abschnitt 5.3 benutzt.

Lemma 5.2, Proposition 5.3 und Satz 5.4 gehören vermutlich zur „Folklore“. Es ist mir aber nicht gelungen, diese Aussagen in der Literatur zu finden. Ich danke Winfried Bruns für den Hinweis, daß Proposition 5.3 gilt.

Lemma 5.2. *Es seien R ein lokaler Integritätsbereich und $0 \neq A \in R^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix. Weiter sei $I \subseteq R$ das von allen $r \times r$-Minoren von A erzeugte Ideal, wobei r der Rang von A (als Element von $\operatorname{Quot}(R)^{m\times n}$) ist. Dann sind äquivalent:*

(a) Es gibt invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_m(R)$, $T \in \mathrm{GL}_n(R)$, so daß SAT die Form

$$SAT = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \tag{5.1}$$

hat;

(b) $I = R$.

Beweis. Als Elementaroperationen bezeichnen wir das Vertauschen von zwei Zeilen oder Spalten, das Hinzuaddieren eines Vielfachen einer Zeile oder einer Spalte zu einer anderen und das Multiplizieren einer Zeile oder Spalte mit einer Einheit $a \in R^\times$. Elementaroperationen werden also durch das Multiplizieren mit sogenannten Elementarmatrizen aus $\mathrm{GL}_m(R)$ bzw. $\mathrm{GL}_n(R)$ von links bzw. rechts gegeben. Man beachte, daß I unverändert bleibt, wenn man Elementaroperationen auf A ausübt.

Es sei $I = R$. Dann liegen nicht alle Einträge von A im maximalen Ideal von R, also gibt es einen Eintrag in $R^\times$. Diesen kann man mit Elementaroperationen nach oben links bringen, zu 1 machen und damit die erste Zeile und Spalte ausräumen. Die resultierende Matrix hat die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right).$$

A' hat den Rang $r-1$, also ist das Ideal der $r \times r$-Minoren der obigen Matrix gleich dem Ideal der $(r-1) \times (r-1)$-Minoren von A'. Nun folgt per Induktion, daß A durch Elementaroperationen auf die in (a) behauptete Gestalt gebracht werden kann.

Dies wenden wir auf Matrizen in $\mathrm{GL}_n(R)$ an und sehen, daß jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen ist. Es gelte nun die Aussage (a). Dann ist I auch das Ideal der $r \times r$-Minoren der rechten Matrix in (5.1), also $I = R$. □

Proposition 5.3. *Es seien R ein Polynomring über einem Körper und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gibt es Ideale $I_0, I_1, I_2, \ldots$ in R, so daß für $P \in X := \mathrm{Spec}(R)$ und $m > 0$ gilt:*

$$P \in X_{\mathrm{def}(M) \geq m} \quad \Longleftrightarrow \quad P \in \mathcal{V}_X(I_{\mathrm{ht}(P)-\mathrm{ht}(P,M)+m-1}).$$

Falls R eine Graduierung trägt, bezüglich der M ein graduierter R-Modul ist, so kann man die I_j als homogene Ideale wählen.

Beweis. Wegen des Hilbertschen Syzygiensatzes existiert eine endliche freie Auflösung von M:

$$0 \longrightarrow F_s \xrightarrow{\varphi_{s-1}} F_{s-1} \xrightarrow{\varphi_{s-2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} F_1 \xrightarrow{\varphi_0} F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \tag{5.2}$$

Es sei $P \in X$. R_P ist flach über R (siehe Eisenbud [18, Proposition 2.5]), also ergibt sich aus (5.2) durch Tensorierung mit R_P eine freie Auflösung

$$0 \longrightarrow F_{s,P} \longrightarrow F_{s-1,P} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{1,P} \longrightarrow F_{0,P} \longrightarrow M_P \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

Die Formel von Auslander und Buchsbaum (siehe Eisenbud [18, Theorem 19.9]) besagt

$$\mathrm{depth}(M_P) = \mathrm{depth}(R_P) - \mathrm{pd}(M_P) = \mathrm{ht}(P) - \mathrm{pd}(M_P),$$

wobei $\mathrm{pd}(M_P)$ die projektive Dimension, also die Länge einer minimalen projektiven Auflösung von M_P ist. Demnach ist $\mathrm{def}(M_P) < m$ genau dann, wenn $\mathrm{pd}(M_P) \leq \mathrm{ht}(P) - \mathrm{ht}(P,M) + m - 1 =: k$. Es gilt also $P \notin X_{\mathrm{def}(M) \geq m}$ genau dann, wenn es eine projektive Auflösung

$$0 \longrightarrow F'_k \longrightarrow F'_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F'_1 \longrightarrow F'_0 \longrightarrow M_P \longrightarrow 0$$

gibt. Da projektive Moduln über einem lokalen Ring frei sind (siehe Eisenbud [18, Theorem A3.2]), ist dies eine freie Auflösung. Ist $k \geq s$, so liefert (5.3) eine solche Auflösung, und die Behauptung stimmt mit $I_k := R$. Wir nehmen also $k < s$ an und vergleichen die obige Auflösung mit (5.3). Wegen der Eindeutigkeit von minimalen freien Auflösungen (siehe Eisenbud [18, Theorem 20.2]) ist das Bild bzw. der Kern von $\varphi_P := R_P \otimes \varphi_k$ in (5.3) ein freier direkter Summand von $F_{k,P}$ bzw. $F_{k+1,P}$. Falls umgekehrt das Bild und der Kern von φ_P freie direkte Summanden sind, so kann man (5.3) zu einer freien Auflösung der Länge k kürzen. Also gilt $P \notin X_{\mathrm{def}(M) \geq m}$ genau dann, wenn φ_P bezüglich geeigneter Basen von $F_{k,P}$ und $F_{k+1,P}$ eine Form wie in (5.1) annimmt. Es sei A die Darstellungsmatrix von φ_k bezüglich Basen von F_{k+1} und F_k, und $I_k \subseteq R$ sei das von den

$r \times r$-Minoren von A erzeugte Ideal, wobei r der Rang von A über $\mathrm{Quot}(R)$ sei. Dann folgt aus Lemma 5.2, daß $P \notin X_{\mathrm{def}(M) \geq m}$ genau dann, wenn $I_k R_P = R_P$, was gleichbedeutend mit $I_k \nsubseteq P$ ist. Damit ist ein geeignetes I_k gefunden.

Ist R graduiert und ist M ein graduierter R-Modul, so kann man die Auflösung (5.2) so wählen, daß die F_i graduierte Moduln mit homogenen Basen und die φ_i graderhaltend sind. Ein Minor eines solchen Homomorphismus φ_i ist gleich der Determinante eines Homomorphismus ψ: $F \to F'$ zwischen zwei freien, graduierten Moduln vom gleichen Rang. Es seien $d_1, \ldots, d_n$ bzw. $e_1, \ldots, e_n$ die Grade von freien Erzeugern von F bzw. F', und $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sei die Darstellungsmatrix von ψ. Für eine Permutation $\pi \in S_n$ gilt dann

$$\deg(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{n} \deg(a_{i,\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{n} (e_i - d_{\pi(i)}) = \sum_{i=1}^{n} e_i - \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

also haben alle Summanden der Determinante den gleichen Grad. Damit ist die Determinante homogen, die Ideale I_j werden also von homogenen Polynomen erzeugt. □

Satz 5.4. *Es seien R eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper und M ein endlich erzeugter R-Modul. Für $0 \leq d \leq \dim(R) + 1$ sei J_d der Schnitt über alle minimalen Primideale Q aus $\mathrm{Supp}_R(M)$ mit $\dim(R/Q) \geq d$, wobei der leere Schnitt gleich R gesetzt wird. Dann existieren Ideale $I_1, I_2, I_3, \ldots$ in R, so daß mit $n := \dim(R)$ und $m > 0$ gilt:*

$$X_{\mathrm{def}(M) \geq m} = \bigcup_{d=0}^{n} \Big(\mathcal{V}_X(I_{n+m-d}) \cap \mathcal{V}_X(J_d) \setminus \mathcal{V}_X(J_{d+1}) \Big).$$

Insbesondere ist $X_{\mathrm{def}(M) \geq m}$ konstruierbar, und Zariski-abgeschlossen, falls $\mathrm{Supp}(M)$ ungemischt ist, d.h. alle minimalen Primideale von $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ dieselbe Dimension haben.

Sind R eine graduierte Algebra und M ein graduierter R-Modul mit $\mathrm{Supp}(M)$ ungemischt, so ist $X_{\mathrm{def}(M) \geq m}$ ein Kegel, d.h. $X_{\mathrm{def}(M) \geq m} = \mathcal{V}_X(I)$ mit einem homogenen Ideal $I \subseteq R$.

Beweis. Es sei $P \in \mathrm{Spec}(R)$. Falls P nicht in $\mathrm{Supp}_R(M)$ liegt, so liegt es in keinem der $\mathcal{V}_X(J_d)$, und $\mathrm{def}(M_P) = 0$, also gilt die Behauptung in diesem Fall. Wir können also $P \in \mathrm{Supp}_R(M)$ annehmen. Es sei R_0 ein Polynomring mit einem surjektiven Homomorphismus φ: $R_0 \to R$ von Algebren. Dadurch wird M zum R_0-Modul. Mit $P_0 := \varphi^{-1}(P) \in \mathrm{Supp}_{R_0}(M)$ gelten $\mathrm{depth}(M_{P_0}) = \mathrm{depth}(M_P)$ und $\mathrm{ht}(P_0, M) = \mathrm{ht}(P, M)$, also $\mathrm{def}(M_{P_0}) = \mathrm{def}(M_P)$. Um Proposition 5.3 anwenden zu können, müssen wir $\mathrm{ht}(P_0) - \mathrm{ht}(P_0, M)$ ermitteln. Jedes $Q \in \mathrm{Supp}_{R_0}(M)$ mit $Q \subseteq P_0$ ist in einer Kette der Länge $\mathrm{ht}(P_0)$ von Primidealen in R_0 zwischen 0 und P_0 enthalten (siehe Eisenbud [18, Corollary 13.6]), also gilt mit $n_0 := \dim(R_0)$

$$\begin{aligned} \mathrm{ht}(P_0) - \mathrm{ht}(P_0, M) &= \min\{\mathrm{ht}(Q) \mid Q \in \mathrm{Supp}_{R_0}(M), Q \subseteq P_0\} = \\ &= n_0 - \max\{\dim(R/Q) \mid Q \in \mathrm{Supp}_R(M), Q \subseteq P\} = n_0 - \min\{d \mid J_d \nsubseteq P\} + 1. \end{aligned}$$

Mit den Idealen $I_0, I_1, \ldots \subseteq R_0$ aus Proposition 5.3 folgt

$$X_{\mathrm{def}(M) \geq m} = \bigcup_{d=0}^{n} \Big(\mathcal{V}_X(\varphi(I_{n_0+m-d-1})) \cap \mathcal{V}_X(J_d) \setminus \mathcal{V}_X(J_{d+1}) \Big).$$

Mit der entsprechenden Umbenennung der I_k folgt die Behauptung.

Die Homogenität der Ideale I_j im graduierten Fall folgt aus Proposition 5.3. □

5.2 Obere und untere Schranken

Eine obere Schranke. Falls R eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper K ist und G eine endliche Gruppe mit einer Operation durch Automorphismen auf R, so ist die relative Spurabbildung $\mathrm{tr}_{G/H} : R^H \to R^G$ für $H \leq G$ ein Homomorphismus von R^G-Moduln. Der relative Spurort, also $(X/\!\!/G)_{\mathrm{tr}_{G/H}} = \mathcal{V}_{X/\!\!/G}\left(\mathrm{tr}_{G/H}(R^H)\right)$, wurde in Abschnitt 4.1 untersucht, mit dem Ergebnis, daß er mit dem wilden Verzweigungsort $(X/\!\!/G)_{X/\!\!/H-\mathrm{wr}}$ übereinstimmt (Satz 4.7). Die folgende Proposition stellt eine Beziehung zwischen dem relativen Spurort und $(X/\!\!/G)_{\mathrm{def}\geq m}$ her. Sie stellt eine gemeinsame Verallgemeinerung von Proposition 1.21 und des Resultats $(V/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}} \subseteq (V/\!\!/G)_{\mathrm{tr}_G}$ für $G \leq \mathrm{GL}(V)$ (Broer [10]) dar. Wir formulieren die Proposition in einer etwas allgemeineren Situation.

Proposition 5.5. *Sei $A \subseteq R$ eine Erweiterung mit Abstiegseigenschaft von endlich erzeugten Algebren über einem Körper. Weiter sei $\varphi\colon R \to A$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Mit $X := \mathrm{Spec}(R)$, $Y := \mathrm{Spec}(A)$ und dem kanonischen Morphismus $\pi\colon X \to Y$ gilt dann für $m > 0$*

$$Y_{\mathrm{def}\geq m} \subseteq \pi(X_{\mathrm{def}\geq m}) \cup \mathcal{V}_Y(\varphi(R)).$$

Beweis. Wegen Satz 5.4 und Hartshorne [27, Kap. II, Exercise 3.19] stehen auf beiden Seiten der behaupteten Inklusion konstruierbare Mengen. Wegen Lemma 4.6 genügt es also zu zeigen, daß jedes maximale Ideal $P \in \mathrm{Spec}_{\max}(A)$ mit $P \notin \pi(X_{\mathrm{def}\geq m}) \cup \mathcal{V}_Y(\varphi(R))$ nicht in $Y_{\mathrm{def}\geq m}$ liegt. Es sei also P ein solches maximales Ideal. Wegen Proposition 1.17 existiert ein maximales Ideal $Q \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $\pi(Q) = P$ und $\mathrm{depth}(P, R) = \mathrm{depth}(Q, R)$. Nach Bruns und Herzog [11, Proposition 1.2.10(a)] gilt $\mathrm{depth}(Q, R) = \mathrm{depth}(R_Q)$. Nach Voraussetzung gilt aber $\mathrm{depth}(R_Q) > \mathrm{ht}(Q) - m$, also insgesamt $\mathrm{depth}(P, R) > n - m$ mit $n := \mathrm{ht}(P)$, da wegen Proposition 1.15 $\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(P)$ gilt. Es gibt also eine R-reguläre Sequenz $a_1, \ldots, a_k \in P$ mit $k > n - m$. Wir möchten zeigen, daß $a_1, \ldots, a_k$ auch A_P-regulär ist. Es sei also für $1 \leq r \leq k$

$$g_1 a_1 + \cdots + g_r a_r = 0$$

mit $g_i \in A$. Aufgrund der R-Regularität gibt es $h_1, \ldots, h_{r-1} \in R$, so daß $g_r = \sum_{i=1}^{r-1} h_i a_i$. Wegen $P \notin \mathcal{V}_Y(\varphi(R))$ existiert ein $f \in R$ mit $\varphi(f) \notin P$. Wir multiplizieren die Gleichung für g_r mit f und wenden φ an. Dies ergibt

$$\varphi(f) \cdot g_r = \sum_{i=1}^{r-1} \varphi(f h_i) \cdot a_i,$$

also liegt g_r in $(a_1, \ldots, a_{r-1})A_P$, und $a_1, \ldots, a_k$ ist in der Tat A_P-regulär. Es folgt $\mathrm{def}(A_P) < m$, was zu zeigen war. □

Eine untere Schranke. Das nächste Ziel ist das Herleiten einer unteren Schranke für den Nicht-Cohen-Macaulay Ort. Hierfür benutzen wir Korollar 1.18. Wie dort sei Λ eine Hopf-Algebra über einem Ring K, R eine Noethersche Λ-Algebra, und M ein über R endlich erzeugter $(R\#\Lambda)$-Modul. Wir setzen voraus, daß Λ endlich dimensional und R endlich erzeugt als R^Λ-Algebra sei, und daß $R^\Lambda / \mathrm{Ann}_{R^\Lambda}(M) \subseteq R/\mathrm{Ann}_R(M)$ eine Erweiterung mit Abstiegseigenschaft sei. Wir schreiben $X = \mathrm{Spec}(R)$, $X/\!\!/\Lambda = \mathrm{Spec}(R^\Lambda)$, und

$$\pi_\Lambda\colon X \to X/\!\!/\Lambda,\ P \mapsto R^\Lambda \cap P.$$

Lemma 5.6. *Mit der obigen Notation sei $S \subset R^\Lambda$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R^Λ mit $1 \in S$. Dann gelten*

$$S^{-1}(R^\Lambda) \cong (S^{-1}R)^\Lambda$$

und

$$S^{-1}(M^\Lambda) \cong (S^{-1}M)^\Lambda.$$

Beweis. $S^{-1}R$ besteht aus Brüchen a/s mit $a \in R$ und $s \in S$, wobei $a/s = a'/s'$, falls $t \in S$ existiert mit $t(sa' - s'a) = 0$. Für $a/s \in S^{-1}R$ gilt $a/s \in (S^{-1}R)^\Lambda$ genau dann, wenn es für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein $t_\lambda \in S$ gibt mit $t_\lambda(\lambda - \epsilon(\lambda))a = 0$. Da Λ endlich dimensional ist, ist dies gleichbedeutend mit der Existenz eines $t \in S$ mit $t(\lambda - \epsilon(\lambda))a = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also $ta \in R^\Lambda$. Es folgt, daß die Abbildung

$$S^{-1}(R^\Lambda) \to (S^{-1}R)^\Lambda,\ a/s \mapsto a/s$$

ein Isomorphismus ist. Entsprechend verfährt man für die zweite Isomorphie, wobei man einen Isomorphismus von Moduln über $S^{-1}(R^\Lambda) \cong (S^{-1}R)^\Lambda$ erhält. □

Proposition 5.7. *Unter den obigen Voraussetzungen sei* $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(K, M) = 0$ *für* $0 < i < r$ *mit* $r > 0$. *Weiter seien* $\alpha \in \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M)$ *und* $I = \operatorname{Ann}_{R^\Lambda}(\alpha)$. *Dann gilt für jedes* $P \in \operatorname{Ass}_{R^\Lambda}(I) \cap \operatorname{Supp}_{R^\Lambda}(M^\Lambda)$ *mit* $\operatorname{ht}(P, M^\Lambda) > r + 1$, *daß*

$$\mathcal{V}_{X/\!\!/\Lambda}(P) \setminus \pi_\Lambda(X_{M-\mathrm{nCM}}) \subseteq (X/\!\!/\Lambda)_{M^\Lambda-\mathrm{nCM}}.$$

Beweis. Wir sehen wie im Beweis zu Korollar 1.18, daß es genügt,

$$\mathcal{V}_{X/\!\!/\Lambda}(I) \setminus \pi_\Lambda(X_{M-\mathrm{nCM}}) \subseteq (X/\!\!/\Lambda)_{M^\Lambda-\mathrm{nCM}}$$

unter der Voraussetzung $\operatorname{ht}(I, M^\Lambda) > r + 1$ zu zeigen. Es sei also $P \subset R^\Lambda$ ein Primideal mit $I \subseteq P$, so daß M_Q für alle $Q \in X$ mit $R^\Lambda \cap Q = P$ Cohen-Macaulay ist. Wir müssen zeigen, daß $(M^\Lambda)_P$ nicht Cohen-Macaulay ist. Es seien $S = R^\Lambda \setminus P$, $R' = S^{-1}R$ und $M' = S^{-1}M$. Wir behaupten, daß M' Cohen-Macaulay über R' ist. Sei nämlich $Q' \subset R'$ ein maximales Ideal. Dann ist $Q_0 := \{a \in R \mid a/1 \in Q'\}$ ein Primideal in R und $Q_0 \cap S = \emptyset$, also $R^\Lambda \cap Q_0 \subseteq P$. Wegen des Aufstiegslemmas existiert ein $Q \in X$ mit $R^\Lambda \cap Q = P$ und $Q_0 \subseteq Q$. Es folgt $Q' \subseteq S^{-1}Q$, also Gleichheit wegen der Maximalität von Q'. Wir erhalten (nach einer kurzen Rechnung) $R'_{Q'} \cong R_Q$ und $M'_{Q'} \cong M_Q$, aber M_Q ist nach Voraussetzung Cohen-Macaulay. Da $Q' \subset R'$ ein beliebiges maximales Ideal war, folgt, daß M' Cohen-Macaulay ist, wie behauptet.

Nun sei $\bar{\alpha} \in \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M')$ das Bild von α unter der von dem kanonischen Homomorphismus $M \to M'$ induzierten Abbildung $\operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M) \to \operatorname{Ext}^r_\Lambda(K, M')$. Dann gilt $\operatorname{Ann}_{S^{-1}(R^\Lambda)}(\bar{\alpha}) = S^{-1}I$ und $\operatorname{ht}\left(S^{-1}I, S^{-1}(M^\Lambda)\right) \geq \operatorname{ht}(I, M^\Lambda) > r + 1$. Wegen Lemma 5.6 ist $S^{-1}(M^\Lambda) = (M')^\Lambda$, also ist Korollar 1.18 anwendbar und liefert, daß $(M')^\Lambda$ nicht Cohen-Macaulay ist. Wegen $(M^\Lambda)_P = (M')^\Lambda$ ist dies die Behauptung. □

Wir kombinieren die Schranken für den Nicht-Cohen-Macaulay Ort mit Resultaten aus Abschnitt 4 über den relativen Spurort und die Geometrie von Annullatoren.

Satz 5.8. *Eine endliche Gruppe* G *operiere durch Automorphismen auf einer endlich erzeugten Algebra* R *über einem Körper* K *der Charakteristik* p. *Weiter seien zwei Normalteiler* $N, H \lhd G$ *gegeben, so daß* G/N *p-elementar abelsch ist und alle Bireflexionen von* G *in* N *liegen. Mit den kanonischen Morphismen* $\pi_G\colon X := \operatorname{Spec}(R) \to X/\!\!/G$ *und* $\pi_{G/H}\colon X/\!\!/H \to X/\!\!/G$ *gilt dann*

$$\bigcup_{\sigma \in G \setminus N} \pi_G(X^\sigma) \setminus \pi_G(X_{\mathrm{nCM}}) \;\subseteq\; (X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}} \;\subseteq\; \pi_{G/H}\left((X/\!\!/H)_{\mathrm{nCM}}\right) \cup \bigcup_{\substack{\sigma \in G,\\ \operatorname{ord}(\sigma H) = p}} \pi_G(X^\sigma).$$

Gilt insbesondere $N = H$ *und sind* R *und* R^N *Cohen-Macaulay, so folgt*

$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}} = \bigcup_{\sigma \in G \setminus N} \pi_G(X^\sigma).$$

In diesem Fall stimmt also der Nicht-Cohen-Macaulay Ort mit dem wilden Verzweigungsort von $X/\!\!/N \to X/\!\!/G$ *überein.*

Beweis. Da wegen Satz 5.4 und Hartshorne [27, Kap. II, Exercise 3.19] alle in der Inklusionskette vorkommenden Mengen konstruierbar sind, können wir wegen Lemma 4.6 annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist. Es gibt also einen Homomorphismus $G \to K$ mit dem Kern N. Nach Korollar 4.8 gilt für das entsprechende $\alpha \in H^1(G, R)$

$$\mathcal{V}_{X/\!\!/G}\left(\operatorname{Ann}_{R^G}(\alpha)\right) = \bigcup_{\sigma \in G \setminus N} \pi_G(X^\sigma).$$

Mit Proposition 5.7 folgt die erste Inklusion. Weiter gilt nach Satz 4.7 und Proposition 4.5

$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{tr}_{G/H}} = (X/\!\!/G)_{X/\!\!/H-\mathrm{wr}} = \bigcup_{\substack{\sigma\in G,\\ \mathrm{ord}(\sigma H)=p}} \pi_G(X^\sigma),$$

woraus mit Proposition 5.5 die zweite Inklusion folgt. □

Die „getwistete" Spurabbildung. In Satz 5.8 wurde die relative Spurabbildung benutzt, um mit Proposition 5.5 eine obere Schranke für den Nicht-Cohen-Macaulay Ort zu erhalten. Um eine kleinere obere Schranke zu erreichen, kann man auch eine Abbildung von der Form

$$\varphi_g\colon R^H \to R^G,\ f \mapsto \mathrm{tr}_{G/H}(f/g)$$

mit $g \in R^H \setminus \{0\}$ benutzen. Voraussetzung ist, daß R^H ein Integritätsbereich ist, und daß die Differente $\mathcal{D}_{R^H/R^G}$ im Hauptideal $R\cdot g$ enthalten ist. Nach Benson [5, Theorem 3.10.2] ist eine notwendige Bedingung hierfür, daß alle über $R\cdot g$ liegenden Primideale von der Höhe 1 verzweigt sind. Die Situation wird noch übersichtlicher, wenn wir uns auf $g \in R^G$ und $H \trianglelefteq G$, $R = S(V)$ beschränken. Wir erinnern daran, daß ein Endomorphismus σ eines Vektorraums V eine **Transvektion** heißt, falls $\sigma - \mathrm{id}_V$ den Rang 1 hat und nilpotent ist.

Proposition 5.9. *$G \le \mathrm{GL}(V)$ sei eine endliche lineare Gruppe, $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, $R = S(V)$, und $f \in R^G$ sei ein Primelement (in R^G). Genau dann ist jedes Element von $\mathrm{tr}_{G/H}(R^H)$ ein Vielfaches von f, wenn f einen Teiler $v \in V$ hat mit $(\sigma-1)V = Kv$ für eine Transvektion $\sigma \in G \setminus H$.*

Beweis. Wegen $R^G\cdot f \in X/\!\!/G := \mathrm{Spec}(R^G)$ gilt nach Proposition 4.5 und Satz 4.7

$$\mathrm{tr}_{G/H}(R^H) \subseteq R^G\cdot f \quad\Longleftrightarrow\quad R^G\cdot f \in \bigcup_{\substack{\sigma\in G,\\ \mathrm{ord}(\sigma H)=p}} \pi_G(X^\sigma),$$

wobei p die Charakteristik des Grundkörpers ist. Die rechte Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß es ein $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma H) = p$ und ein $P \in X^\sigma$ gibt mit $\pi_G(P) = R^G\cdot f$. Wegen Proposition 1.13 und 1.15 hat P die Höhe 1, also ist P nach Benson [5, Proposition 3.5.1] ein Hauptideal, $P = R\cdot g$ mit einem Primteiler g von f. $P \in X^\sigma$ impliziert nun $(\sigma - \mathrm{id}_V)V \subseteq K\cdot g$, also liegt $g \in V$ und $\mathrm{rk}_V(\sigma - \mathrm{id}_V) \le 1$. Wegen $\mathrm{ord}(\sigma H) = p$ folgt, daß σ eine Transvektion ist.

Falls f umgekehrt einen Teiler $v \in V$ hat mit $(\sigma - 1)V = Kv$ für eine Transvektion $\sigma \in G\setminus H$, so folgt $\pi_G(R\cdot v) = R^G\cdot f$ und $R\cdot v \in X^\sigma$, nach obigem also $\mathrm{tr}_{G/H}(R^H) \subseteq R^G\cdot f$. □

Beispiel 5.10. Proposition 5.9 zeigt, daß man durch die Abbildung $f \mapsto \mathrm{tr}_{G/H}(f/g)$ gute Abschätzungen erwarten kann, wenn G viele Transvektionen enthält. Die in Beispiel 4.14 behandelten Gruppen von Nakajima sind daher naheliegende Kandidaten für diese Methode. Tatsächlich gelingt es, auf diesem Wege für die Gruppen von Nakajima den Nicht-Cohen-Macaulay Ort zu bestimmen. Die Rechnungen hierzu sind jedoch relativ lang, und wir verzichten darauf, sie an dieser Stelle widerzugeben, da im nächsten Abschnitt eine wesentlich einfachere Methode eingeführt wird, um den Nicht-Cohen-Macaulay Ort für dieses und andere Beispiele zu bestimmen.

5.3 Benutzung des Scheibensatzes von Luna

Wir schränken uns nun auf den Fall einer linearen Gruppenoperation auf einem Vektorraum ein. Wie wir sehen werden, kann man hier den Scheibensatz von Luna (siehe Luna [48] oder Slodowy [63]) verwenden, um eine relativ einfache Beschreibung des Nicht-Cohen-Macaulay Orts zu erhalten. Der Scheibensatz wurde von Luna [48] nur für reduktive Gruppen in Charakteristik 0 formuliert. Für den Fall positiver Charakteristik gaben Bardsley und Richardson [2] ein Kriterium für die Gültigkeit an. Dies Kriterium ist für endliche Gruppen immer erfüllt, wie wir im Beweis zur folgenden Proposition sehen werden.

Proposition 5.11. *Es seien G eine endliche Gruppe, K ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein endlich erzeugter KG-Modul. Für $x \in V$ schreiben wir $G_x := \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x\}$, $R := S(V^*)$ und $R_x^G := (R^G)_{P_x}$, wobei $P_x = \{f \in R^G \mid f(x) = 0\}$. Für $x \in V$ gilt dann*

$$\widehat{R_x^G} \cong \widehat{R_0^{G_x}},$$

wobei jeweils $\widehat{L}$ die Komplettierung eines lokalen Rings L bezeichnet.

Beweis. Da G endlich ist, ist die G-Bahn $G \cdot x$ von x abgeschlossen und separabel. Weiter ist der Tangentialraum $T_x(G{\cdot}x)$ bei x an die Bahn gleich dem Nullraum. $T_x(G{\cdot}x)$ hat also ein Komplement als KG-Modul in $T_x(V)$. Damit existiert nach Bardsley und Richardson [2, Proposition 7.3] eine offene, affine Umgebung $S \subset V$ von x, die eine étale Scheibe um x bildet. Insbesondere existiert ein étaler Morphismus $S /\!\!/ G_x \to V /\!\!/ G$, der also einen Isomorphismus

$$\widehat{R_x^G} \xrightarrow{\sim} \widehat{K[S]_x^{G_x}}$$

der komplettierten lokalen Ringe induziert. Wegen der Offenheit von S gilt $K[S]_x \cong R_x$, also auch $K[S]_x^{G_x} \cong R_x^{G_x}$. Weiter liefert die Translation mit x einen G_x-äquivarianten Automorphismus $R \to R$, wobei einer polynomialen Abbildung $f\colon V \to K$ die Abbildung $v \mapsto f(v + x)$ für $v \in V$ zugeordnet wird. Wir erhalten einen Isomorphismus $R_x \xrightarrow{\sim} R_0$ von KG_x-Moduln, also auch $R_x^{G_x} \cong R_0^{G_x}$. Zusammensetzen der Isomorphien liefert nun die Behauptung. □

Nun erhalten wir die angekündigte einfache Beschreibung des Nicht-Cohen-Macaulay Orts und der Mengen $(X /\!\!/ G)_{\mathrm{def} \geq m}$.

Satz 5.12. *Es seien G eine endliche Gruppe, K ein Körper und V ein endlich erzeugter KG-Modul. Mit $R := S(V^*)$, $X := \operatorname{Spec}(R)$ und dem kanonischen Morphismus $\pi_G\colon X \to X /\!\!/ G$ gilt dann für $m \geq 0$ und $P \in X$*

$$\pi_G(P) \in (X /\!\!/ G)_{\mathrm{def} \geq m} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{def}(R^{I_G(P)}) \geq m.$$

Dabei ist $I_G(P)$ die Trägheitsgruppe von P.

Beweis. Wegen Satz 5.4 ist $(X /\!\!/ G)_{\mathrm{def} \geq m}$ eine konstruierbare Menge. Für eine gegebene Untergruppe $H \leq G$ gilt

$$Y_H := \{P \in X \mid I_G(P) = H\} = \bigcap_{\sigma \in H} X^\sigma \setminus \bigcup_{\sigma \in G \setminus H} X^\sigma,$$

Y_H ist also konstruierbar. Die Menge $Y := \{P \in X \mid \mathrm{def}(R^{I_G(P)}) \geq m\}$ ist die Vereinigung aller Y_H mit $\mathrm{def}(R^H) \geq m$, also konstruierbar. Nach Hartshorne [27, Kap. II, Exercise 3.19] auch $\pi_G(Y)$ konstruierbar. Es ist die Gleichheit von $\pi_G(Y)$ und $(X /\!\!/ G)_{\mathrm{def} \geq m}$ zu zeigen, wegen Lemma 4.6 können wir also annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen und P ein maximales Ideal ist. Es gibt ein $x \in V$, so daß $P = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$, und es gilt $I_G(P) = G_x$ (siehe Notation 4.1). Es ist also $\mathrm{def}(R_x^G) = \mathrm{def}(R^{G_x})$ nachzuweisen. Nach Definition der Tiefe eines graduierten Rings und nach Bruns und Herzog [11, Proposition 1.2.10(a)] gilt aber

$$\mathrm{def}(R^{G_x}) = \dim(R^{G_x}) - \mathrm{depth}(R^{G_x}) = \dim(R^{G_x}) - \mathrm{depth}(R_0^{G_x}) = \mathrm{def}(R_0^{G_x}),$$

und weiter nach Bruns und Herzog [11, Corollary 2.1.8]

$$\mathrm{def}(R_0^{G_x}) = \mathrm{def}(\widehat{R_0^{G_x}}) \quad \text{und} \quad \mathrm{def}(R_x^G) = \mathrm{def}(\widehat{R_x^G}).$$

Nun folgt die Behauptung aus Proposition 5.11. □

Anmerkung 5.13. Neben dem Nicht-Cohen-Macaulay Ort kann man auch den singulären Ort eines (affinen) Schemas $Y = \operatorname{Spec}(A)$ betrachten. Dieser ist definiert durch

$$Y_{\text{sing}} = \{P \in Y \mid A_P \text{ ist kein regulärer lokaler Ring}\}.$$

Da jeder reguläre lokale Ring Cohen-Macaulay ist (siehe Bruns und Herzog [11, Corollary 2.2.6]), gilt $Y_{\text{nCM}} \subseteq Y_{\text{sing}}$. Falls A eine endlich erzeugte Algebra über einem Körper ist, so ist Y_{sing} abgeschlossen in Y (siehe Eisenbud [18, S. 402–403]). In der Situation von Satz 5.12 erhalten wir durch Anwendung von Proposition 5.11 für $P \in X$:

$$\pi_G(P) \in (X/\!\!/G)_{\text{sing}} \quad \Longleftrightarrow \quad R^{I_G(P)} \text{ ist nicht isomorph zu einer Polynomalgebra.}$$

Dies ist (zumindest im Fall $\operatorname{char}(K) \nmid |G|$) wohlbekannt.

Korollar 5.14. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 5.12 gilt für jedes $P \in X$*

$$\operatorname{depth}(R^{I_G(P)}) \geq \operatorname{depth}(R^G).$$

Ist insbesondere R^G Cohen-Macaulay, so gilt dies auch für jedes $R^{I_G(P)}$ mit $P \in X$.

Beweis. Mit $m := \operatorname{def}(R^{I_G(P)})$ gilt nach Satz 5.12 $\pi_G(P) \in (X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m}$, also $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m} \neq \emptyset$. Nach Satz 5.4 ist $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m} = \mathcal{V}_{X/\!\!/G}(I)$ mit $I \subset R^G$ homogen, also $I \subseteq R_+^G$. Es folgt $\pi_G(R_+) = R_+^G \in (X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m}$ und wieder mit Satz 5.12 $\operatorname{def}(R^G) \geq m$, da $I_G(R_+) = G$ gilt. Wegen $\operatorname{def}(R^H) = \dim(R) - \operatorname{depth}(R^H)$ für jedes $H \leq G$ folgt die behauptete Ungleichung.

Die zweite Aussage folgt, da R^G genau dann Cohen-Macaulay ist, wenn $\operatorname{depth}(R^G) = \dim(R^G)$ gilt (siehe Bruns und Herzog [11, Exercise 2.1.27]). □

Die Dimension des Nicht-Cohen-Macaulay Orts. Bevor wir Satz 5.12 auf einige Klassen von linearen Gruppen anwenden, vermerken wir eine weitere Folgerung.

Korollar 5.15. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 5.12 sei $m > 0$, und $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m}$ sei nicht-leer. Dann ist die Dimension von $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m}$ mindestens 1 und höchstens $\dim_K(V) - m - 2$.*

Beweis. Wegen der Zariski-Abgeschlossenheit von $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m}$ können wir annehmen, daß K algebraisch abgeschlossen ist, und es genügt, für die algebraische Menge $Y := \{x \in V \mid \operatorname{def}(R_x^G) \geq m\}$ die behaupteten Dimensionsschranken nachzuweisen. Aus $Y \neq \emptyset$ folgt $0 \in Y$, da Y nach Satz 5.4 ein Kegel ist, und damit

$$\operatorname{def}(R^G) = \operatorname{def}(R_0^G) \geq m.$$

Wegen $m > 0$ muß $|G|$ durch $p := \operatorname{char}(K)$ teilbar sein, da R^G sonst Cohen-Macaulay wäre. Es sei P eine p-Sylowgruppe von G. Für $0 \neq v \in V$ besteht der von der P-Bahn von v aufgespannte $\mathbb{F}_p$-Vektorraum aus endlich vielen Vektoren und ist P-stabil. Da P eine p-Gruppe ist, wird ein Vektor $v' \neq 0$ aus diesem Raum von P festgelassen. Es folgt $\dim(V^P) > 0$. Für $x \in V^P$ gilt aber $P \subseteq G_x$, also mit Proposition 1.21

$$\operatorname{def}(R^{G_x}) \geq \operatorname{def}(R^G) \geq m.$$

Aus Satz 5.12 folgt nun $V^P \subseteq Y$, also $\dim(Y) > 0$.

Aus Satz 5.12 und der Abgeschlossenheit von Y folgt, daß Y die Vereinigung von Unterräumen der Form V^H ist, wobei H gewisse Untergruppen von G durchläuft, für welche $\operatorname{def}(R^H) \geq m$ gilt. Zu einem solchen H sei $P_H \leq H$ eine p-Sylowgruppe. Wieder mit Proposition 1.21 folgt $\operatorname{def}(R^{P_H}) \geq m$. Nach Ellingsrud und Skjelbred [19] gilt aber $\operatorname{depth}(R^{P_H}) \geq \dim(V^{P_H}) + 2$, also folgt

$$\dim(V^H) \leq \dim(V^{P_H}) \leq \operatorname{depth}(R^{P_H}) - 2 \leq \dim(V) - m - 2.$$

Damit gilt auch $\dim(Y) \leq \dim(V) - m - 2$. □

Anmerkung. Mit ganz entsprechenden Argumenten bekommen wir für den singulären Ort die Abschätzung
$$\dim\left((X/\!\!/G)_{\mathrm{sing}}\right) \le \dim_K(V) - 2.$$
Diese ist wohlbekannt und folgt auch aus der Tatsache, daß der Invariantenring R^G ganz abgeschlossen in seinen Quotientenkörper ist. Interessant ist der Vergleich mit der oben bewiesenen Schranke
$$\dim\left((X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}}\right) \le \dim_K(V) - 3.$$
Als Beispiel betrachten wir die zyklische Gruppe der Ordnung 2, die auf V durch $v \mapsto -v$ operiert, wobei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ vorausgesetzt wird. Ist $\dim(V) > 1$, so folgt $(X/\!\!/G)_{\mathrm{sing}} = \{0\}$ nach Anmerkung 5.13. Im Falle $\dim(V) = 2$ sehen wir, daß sich die Schranke $\dim_K(V) - 2$ für $\dim((X/\!\!/G)_{\mathrm{sing}})$ nicht verbessern läßt. Außerdem kann der singuläre Ort aus nur einem Punkt bestehen, was nach Korollar 5.15 für den Nicht-Cohen-Macaulay Ort nicht möglich ist. Aus der Existenz von vierdimensionalen Invariantenringen, die nicht Cohen-Macaulay sind (siehe Bertin [7] oder Korollar 4.11), folgt außerdem, daß die Schranken aus Korollar 5.15 nicht verbessert werden können.

Der Nicht-Cohen-Macaulay Ort für einige Klassen von Gruppen. In Korollar 4.13 wurde eine Klasse von Gruppen angegeben, für die sich zu jeder Darstellung über einem Körper der Charakteristik p leicht feststellen läßt, ob der Invariantenring Cohen-Macaulay ist. Dies sind die Gruppen G mit der Eigenschaft, daß es einen Normalteiler N mit $p \nmid |N|$ gibt, so daß G/N eine zyklische p-Gruppe ist. Man beachte, daß auch jede Untergruppe einer solchen Gruppe G diese Eigenschaft hat. Es sei V ein KG-Modul für eine Gruppe G mit der genannten Eigenschaft, und $\mathcal{M}$ sei die Menge aller Untergruppen $H \le G$ mit den Eigenschaften

(i) $\langle N \cap H, \mathrm{Bir}(H)\rangle \neq H$,

(ii) $V^{H'} \subsetneqq V^H$ für $H \subsetneqq H' \le G$.

Dann folgt aus Satz 5.12, Korollar 4.13 und der Abgeschlossenheit des Nicht-Cohen-Macaulay Orts
$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}} = \bigcup_{H \in \mathcal{M}} X^H,$$
wobei $X = \mathrm{Spec}(S(V^*))$ und $X^H = \bigcap_{\sigma \in H} X^\sigma$. In dem folgenden Spezialfall wird das Ergebnis wesentlich übersichtlicher.

Satz 5.16. *Es seien K ein Körper der Charakteristik p, $G = N \times Z$ das direkte Produkt aus einer zyklischen p-Gruppe Z und einer endlichen Gruppe N mit $p \nmid |N|$, und V ein endlich erzeugter KG-Modul. Mit $X := \mathrm{Spec}(S(V^*))$ gelten:*

(a) Falls Z von einer Bireflexion erzeugt wird, so ist $(X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}}$ leer. Andernfalls sei $\langle\sigma\rangle \le Z$ die kleinste Untergruppe, die nicht von einer Bireflexion erzeugt wird. Dann gilt
$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}} = \pi_G(X^\sigma).$$

(b) Zusätzlich sei N abelsch. Für $1 \le m \le r := \dim_K(V) - \dim_K(V^Z) - 2$ sei $\langle\sigma_m\rangle \le Z$ die kleinste Untergruppe mit $\dim_K(V^{\sigma_m}) \le \dim_K(V) - m - 2$. Dann gilt
$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{def} \ge m} = \pi_G(X^{\sigma_m}) \quad \textit{für} \quad 1 \le m \le r$$
und
$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{def} \ge m} = \emptyset \quad \textit{für} \quad m > r.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst Aussage (a). Falls Z von einer Bireflexion erzeugt wird, so ist R^Z (mit $R := S(V^*)$) nach Ellingsrud und Skjelbred [19] Cohen-Macaulay (siehe (4.6)). Wegen Proposition 1.21 ist dann auch R^G Cohen-Macaulay, also $(X/\!\!/G)_{\text{nCM}} = \emptyset$. $H \leq G$ sei eine Untergruppe. Dann gilt $H = (H \cap N) \times (H \cap Z)$. Falls $Z_1 := \langle \sigma \rangle$ keine Untergruppe von H ist, so folgt $H \cap Z \subsetneqq Z_1$, also wird $H \cap Z$ von einer Bireflexion erzeugt. Dann ist R^H wie oben Cohen-Macaulay. Gilt andererseits $Z_1 \subseteq H$, so enthält $H \cap Z$ einen Normalteiler Z' von Index p mit $\text{Bir}(Z) \subseteq Z'$. Dann hat $N' := (H \cap N) \times Z' \lhd H$ den Index p. Es sei $\tau\rho \in \text{Bir}(H)$ mit $\tau \in H \cap N$ und $\rho \in H \cap Z$. Dann gilt $\rho^{|N|} = (\tau\rho)^{|N|} \in \text{Bir}(Z)$, also $\tau\rho \in N'$. N' enthält also alle Bireflexionen aus H, also ist R^H nach Korollar 4.10 nicht Cohen-Macaulay. Wir haben also gesehen, daß R^H genau dann nicht Cohen-Macaulay ist, wenn $Z_1 \subseteq H$. Für $P \in X$ folgt nun nach Satz 5.12:

$$\pi_G(P) \in (X/\!\!/G)_{\text{nCM}} \quad \Leftrightarrow \quad R^{I_G(P)} \text{ is not Cohen-Macaulay} \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 \subseteq I_G(P).$$

Die letzte Bedingung ist äquivalent zu $P \in X^\sigma$.

Für den Beweis von (b) benutzen wir die von Campbell et al. [15] gelieferte Verallgemeinerung der Tiefenformel von Ellingsrud und Skjelbred. Man beachte, daß jede Untergruppe $H \leq G$ (als abelsche Gruppe mit zyklischer p-Sylowgruppe $H \cap Z$) flach ist. Also gilt für $H \leq G$

$$\text{depth}(R^H) = \min\{\dim_K(V^{H\cap Z}) + 2, \dim_K(V)\}.$$

Für $m \geq 1$ ist genau dann $\text{def}(R^H) \geq m$, wenn $\dim_K(V^{H\cap Z}) \leq \dim_K(V) - m - 2$ gilt. Für $m > r$ kommt dies nicht vor, und für $m \leq r$ ist es gleichbedeutend mit $\sigma_m \in H \cap Z$. Aus Satz 5.12 folgt also $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m} = \emptyset$ für $m > r$. Es seien $1 \leq m \leq r$ und $P \in X$. Dann gilt

$$\pi_G(P) \in (X/\!\!/G)_{\text{def}\geq m} \quad \Leftrightarrow \quad \text{def}(R^{I_G(P)}) \geq m \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_m \in I_G(P) \quad \Leftrightarrow \quad P \in X^{\sigma_m}.$$

Damit ist auch (b) gezeigt. □

Anmerkung. Durch entsprechende Auswahl der Gruppen N und Z und der Darstellung V in Satz 5.16 kann man erreichen, daß $(X/\!\!/G)_{\text{nCM}}$ echt in $(X/\!\!/G)_{\text{sing}}$ enthalten ist (siehe Anmerkung 5.13), und daß außerdem die Kette

$$(X/\!\!/G)_{\text{sing}} \supset (X/\!\!/G)_{\text{nCM}} \supseteq (X/\!\!/G)_{\text{def}\geq 2} \supseteq (X/\!\!/G)_{\text{def}\geq 3} \supseteq \dots$$

beliebig viele „Sprungstellen" hat.

Wir benutzen nun Satz 5.12, um wie in Beispiel 4.14 angekündigt den Nicht-Cohen-Macaulay Ort für die Gruppen von Nakajima [54] zu berechnen.

Beispiel 5.17. Wir übernehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Beispiel 4.14, und es sei $X/\!\!/G = \text{Spec}(R^G)$. Um $(X/\!\!/G)_{\text{def}\geq k}$ für $k \geq 0$ auszurechnen, können wir wegen Satz 5.4 K als algebraisch abgeschlossen annehmen, und wir müssen nur für maximale Ideale $P \in \text{Spec}_{\max}(R)$ testen, ob $\pi_G(P) \in (X/\!\!/G)_{\text{def}\geq k}$ liegt. Den maximalen Idealen in R entsprechen Vektoren v aus V, und wir müssen nach Satz 5.12 die Tiefe $\text{depth}(R^{G_v})$ mit $G_v = \{\sigma \in G \mid \sigma(v) = v\}$ ermitteln. Es sei also $v = \xi_0 e_0 + \dots + \xi_{2m} e_{2m}$ mit $\xi_i \in K$, wobei $e_0, \dots, e_{2m} \in V = K^n$ die Standardbasisvektoren sind. Für $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}_q$ liegt $\sigma_{\alpha_0,\dots,\alpha_m}$ genau dann ist G_v, wenn

$$\alpha_0\xi_0 + \alpha_i\xi_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, m. \tag{5.4}$$

Wir unterscheiden vier Fälle:

(1) $\xi_0 \cdots \xi_m \neq 0$ und $\xi_i/\xi_0 \in \mathbb{F}_q$ für alle $1 \leq i \leq m$. Dann ist (5.4) genau für $\alpha_i = -\alpha_0\xi_0/\xi_i$ $(1 \leq i \leq m)$ erfüllt. Für $1 \neq \sigma \in G_v$ gilt $\dim_K(V^\sigma) = m + 1 = \dim_K(V^{G_v})$, also ist G_v flach, und nach Campbell et al. [15] folgt $\text{depth}(R^{G_v}) = m + 3$.

(2) $\xi_0 \cdots \xi_m \neq 0$, aber $\xi_i/\xi_0 \notin \mathbb{F}_q$ für mindestens ein $1 \leq i \leq m$. Aus (5.4) folgt dann $\alpha_0 = \alpha_i = 0$ und weiter $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, also $G_v = \{1\}$. R^{G_v} ist also in diesem Fall ein Polynomring.

(3) $\xi_0 = \ldots = \xi_m = 0$. Dann gilt $G_v = G$, also ist R^{G_v} nach Beispiel 4.14 nicht Cohen-Macaulay. Genauer gilt wegen Korollar 5.14 und Fall (1) die Abschätzung $\operatorname{depth}(R^G) \leq m+3$. Andererseits haben wir nach Ellingsrud und Skjelbred [19]

$$\operatorname{depth}(R^G) \geq \min\{\dim_K(V^G) + 2, \dim_K(V)\} = m + 2,$$

also $\operatorname{depth}(R^G) \in \{m+2, m+3\}$.

(4) Es gibt $0 \leq i, j \leq m$ mit $\xi_i = 0$ und $\xi_j \neq 0$. Nach (5.4) folgt

$$G_v = \{\sigma_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m} \mid \alpha_0\xi_0 = \ldots = \alpha_m\xi_m = 0\}.$$

Ist $\xi_0 \neq 0$, so hat G_v die von Nakajima [54] als Kriterium für abelsche Transvektionsgruppen mit polynomiellem Invariantenring angegebene Gestalt. Ist andererseits $\xi_0 = 0$, so nimmt G_v bezüglich der Basis

$$e_0, \ldots, e_m, e_{m+1} + \cdots + e_{2m}, e_{m+1}, \ldots, e_{m+j-1}, e_{m+j+1}, \ldots, e_{2m}$$

die entsprechende Gestalt an. In beiden Fällen ist R^{G_v} also ein Polynomring.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$(X/\!\!/G)_{\mathrm{nCM}} = (X/\!\!/G)_{\mathrm{sing}} = \mathcal{V}_{X/\!\!/G}\left(x_1^{q-1} - x_0^{q-1}, \ldots, x_m^{q-1} - x_0^{q-1}\right) =: Y,$$

und außerdem $(X/\!\!/G)_{\mathrm{def}\geq k} = Y$ für $1 \leq k \leq m-2$. Es ist unklar, ob $(X/\!\!/G)_{\mathrm{def}\geq m-1} = \mathcal{V}_{X/\!\!/G}(x_0, \ldots, x_m)$ oder $(X/\!\!/G)_{\mathrm{def}\geq m-1} = \emptyset$ gilt. Dies hängt davon ab, ob $\operatorname{depth}(R^G) = m+2$ oder $m+3$ gilt. Auf jeden Fall gilt $(X/\!\!/G)_{\mathrm{def}\geq k} = \emptyset$ für $k \geq m$.

Für $m = 3$ und $q = 2$ lassen sich der Invariantenring und seine Tiefe mit MAGMA bestimmen. Das Ergebnis lautet $\operatorname{depth}(R^G) = 6 = m+3$, also gilt hier $(X/\!\!/G)_{\mathrm{def}\geq m-1} = \emptyset$.

Literatur

[1] Alejandro Adem, R. James Milgram, *Cohomology of Finite Groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1994.

[2] Peter Bardsley, R. W. Richardson, *Étale Slices for Algebraic Transformation Groups in Characteristic p*, Proc. London Math. Soc. **51** (1985), 295–317.

[3] David J. Benson, *Representations and Cohomology I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **30**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.

[4] David J. Benson, *Representations and Cohomology II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **31**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.

[5] David J. Benson, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, Lond. Math. Soc. Lecture Note Ser. **190**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1993.

[6] Michel Van den Bergh, *Modules of Covariants*, in: *Proceedings of the International Congress of Mathematics, ICM '94*, Bnd. 1, S. 352–362, Birkhäuser, Basel 1995.

[7] Marie-José Bertin, *Anneaux d'invariants d'anneaux de polynomes, en caractéristique p*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris (Série A) **264** (1967), 653–656.

[8] Wieb Bosma, John J. Cannon, Catherine Playoust, *The Magma Algebra System I: The User Language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.

[9] Nicolas Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 1–3*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1989.

[10] Abraham Broer, *Remarks on Invariant Theory of Finite Groups*, preprint, Université de Montréal, Montréal, 1997.

[11] Winfried Bruns, Jürgen Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[12] H. E. A. Campbell, I. P. Hughes, R. D. Pollack, *Rings of Invariants and p-Sylow Subgroups*, Canad. Math. Bull. **34(1)** (1991), 42–47.

[13] H. E. A. Campbell, I. P. Hughes, R. J. Shank, D. L. Wehlau, *Bases for Rings of Coinvariants*, Transformation Groups **1** (1996), 307–336.

[14] H. E. A. Campbell, A. V. Geramita, I. P. Hughes, R. J. Shank, D. L. Wehlau, *Non-Cohen-Macaulay Vector Invariants and a Noether Bound for a Gorenstein Ring of Invariants*, Canad. Math. Bull. **42** (1999), 155–161.

[15] H. E. A. Campbell, I. P. Hughes, G. Kemper, R. J. Shank, D. L. Wehlau, *Depth of Modular Invariant Rings*, Transformation Groups **5** (2000), 21–34.

[16] B. Char, K. Geddes, G. Gonnet, M. Monagan, S. Watt, *Maple Reference Manual*, Waterloo Maple Publishing, Waterloo, Ontario 1990.

[17] Miriam Cohen, Davida Fishman, *Hopf Algebra Actions*, J. of Algebra **100** (1986), 363–379.

[18] David Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York 1995.

[19] Geir Ellingsrud, Tor Skjelbred, *Profondeur d'anneaux d'invariants en caractéristique p*, Compos. Math. **41** (1980), 233–244.

[20] Walter R. Ferrer Santos, *Finite Generation of the Invariants of Finite Dimensional Hopf Algebras*, J. of Algebra **165** (1994), 543–549.

[21] Mark Feshbach, *p-Subgroups of Compact Lie Groups and Torsion of Infinite Height in $H^*(BG)$, II*, Mich. Math. J. **29** (1982), 299–306.

[22] Peter Fleischmann, *Relative Trace Ideals and Cohen-Macaulay Quotients of Modular Invariant Rings*, in: P. Dräxler, G.O. Michler, C. M. Ringel, Hsg., *Computational Methods for Representations of Groups and Algebras, Euroconference in Essen, April 1-5 1997*, Progress in Mathematics **173**, Birkhäuser, Basel 1999.

[23] Robert M. Fossum, Phillip A. Griffith, *Complete Local Factorial Rings which are not Cohen-Macaulay in Characteristic p*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série **8** (1975), 189–200.

[24] Donna Glassbrenner, *The Cohen-Macaulay Property and F-rationality in Certain Rings of Invariants*, J. of Algebra **176** (1995), 824–860.

[25] Daniel Gorenstein, Richard Lyons, Ronald Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups, Number 3*, Bnd. 40.3 von *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1998.

[26] William J. Haboush, *Reductive Groups are Geometrically Reductive*, Ann. of Math. **102** (1975), 67–83.

[27] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1977.

[28] Melvin Hochster, John A. Eagon, *Cohen-Macaulay Rings, Invariant Theory, and the Generic Perfection of Determinantal Loci*, Amer. J. of Math. **93** (1971), 1020–1058.

[29] Melvin Hochster, Joel L. Roberts, *Rings of Invariants of Reductive Groups Acting on Regular Rings are Cohen-Macaulay*, Adv. in Math. **13** (1974), 115–175.

[30] Ian Hughes, Gregor Kemper, *Symmetric Powers of Modular Representations, Hilbert Series and Degree Bounds*, Comm. in Algebra **28** (2000), 2059–2088.

[31] James E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, zweite Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1981.

[32] Bertram Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1967.

[33] Nathan Jacobson, *A Note on Lie Algebras of Characteristic p*, Amer. J. Math. **74** (1952), 357–359.

[34] Victor G. Kac, Kei-Ichi Watanabe, *Finite Linear Groups whose Ring of Invariants is a Complete Intersection*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 221–223.

[35] Gregor Kemper, *Calculating Invariant Rings of Finite Groups over Arbitrary Fields*, J. Symbolic Comput. **21** (1996), 351–366.

[36] Gregor Kemper, *Lower Degree Bounds for Modular Invariants and a Question of I. Hughes*, Transformation Groups **3** (1998), 135–144.

[37] Gregor Kemper, *Computational Invariant Theory*, The Curves Seminar at Queen's, Volume XII, in: Queen's Papers in Pure and Applied Math. **114** (1998), 5–26.

[38] Gregor Kemper, *An Algorithm to Calculate Optimal Homogeneous Systems of Parameters*, J. Symbolic Comput. **27** (1999), 171–184.

[39] Gregor Kemper, *Hilbert Series and Degree Bounds in Invariant Theory*, in: B. Heinrich Matzat, Gert-Martin Greuel, Gerhard Hiss, Hsg., *Algorithmic Algebra and Number Theory*, S. 249–263, Springer-Verlag, Heidelberg 1999.

[40] Gregor Kemper, *On the Cohen-Macaulay Property of Modular Invariant Rings*, J. of Algebra **215** (1999), 330–351.

[41] Gregor Kemper, *A Characterization of Linearly Reductive Groups by their Invariants*, Transformation Groups **5** (2000), 85–92.

[42] Gregor Kemper, Gunter Malle, *The Finite Irreducible Linear Groups with Polynomial Ring of Invariants*, Transformation Groups **2** (1997), 57–89.

[43] Gregor Kemper, Gunter Malle, *Invariant Fields of Finite Irreducible Reflection Groups*, Math. Ann. **315** (1999), 569–586.

[44] Gregor Kemper, Gunter Malle, *Invariant rings and fields of finite groups*, in: B. Heinrich Matzat, Gert-Martin Greuel, Gerhard Hiss, Hsg., *Algorithmic Algebra and Number Theory*, S. 265–281, Springer-Verlag, Heidelberg 1999.

[45] Gregor Kemper, Allan Steel, *Some Algorithms in Invariant Theory of Finite Groups*, in: P. Dräxler, G.O. Michler, C. M. Ringel, Hsg., *Computational Methods for Representations of Groups and Algebras, Euroconference in Essen, April 1-5 1997*, Progress in Mathematics **173**, S. 267–285, Birkhäuser, Basel 1999.

[46] Hanspeter Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Vieweg, Braunschweig 1985.

[47] Hanspeter Kraft, Frank Kutzschenbauch, *Equivariant Affine Line Bundles and Linearization*, Mathematical Research Letters **3** (1996), 619–627.

[48] Domingo Luna, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France **33** (1973), 81–105.

[49] Susan Montgomery, *Hopf Algebras and their Action on Rings*, Regional Conference Series in Mathematics **82**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1993.

[50] David Mumford, John Fogarty, Frances Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **34**, dritte Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1994.

[51] Masayoshi Nagata, *Complete Reducibility of Rational Representations of a Matrix Group*, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961), 87–99.

[52] Masayoshi Nagata, *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1965.

[53] Haruhisa Nakajima, *Invariants of Finite Groups Generated by Pseudo-Reflections in Positive Characteristic*, Tsukuba J. Math. **3** (1979), 109–122.

[54] Haruhisa Nakajima, *Invariants of Finite Abelian Groups Generated by Transvections*, Tokyo J. Math. **3** (1980), 201–214.

[55] Władysław Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, zweite Aufl., Spinger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990.

[56] P. E. Newstead, *Intoduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1978.

[57] Vladimir L. Popov, *On Hilbert's Theorem on Invariants*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **249** (1979), English translation Soviet Math. Dokl. **20** (1979), 1318–1322.

[58] Vladimir L. Popov, Ernest B. Vinberg, *Invariant Theory*, in: N. N. Parshin, I. R. Shafarevich, Hsg., *Algebraic Geometry IV*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **55**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1994.

[59] David R. Richman, *On Vector Invariants over Finite Fields*, Adv. in Math. **81** (1990), 30–65.

[60] Issai Schur, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1968.

[61] R. James Shank, David L. Wehlau, *On the Depth of the Invariants of the Symmetric Power Representations of* $SL_2(\mathbf{F}_p)$, J. of Algebra **218** (1999), 642–653.

[62] R. James Shank, David L. Wehlau, *The Transfer in Modular Invariant Theory*, J. of Pure and Applied Algebra **142** (1999), 63–77.

[63] Peter Slodowy, *Der Scheibensatz für algebraische Transformationsgruppen*, in: Hanspeter Kraft, Peter Slodowy, Tonny A. Springer, Hsg., *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Seminar* **13**, Birkhäuser, Basel 1987.

[64] Larry Smith, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, A. K. Peters, Wellesley, Mass. 1995.

[65] Larry Smith, *Some Rings of Invariants that are Cohen-Macaulay*, Can. Math. Bull. **39** (1996), 238–240.

[66] Larry Smith, *Homological Codimension of Modular Rings of Invariants and the Koszul Complex*, J. Math. Kyoto Univ. **38** (1998), 727–747.

[67] Tonny A. Springer, *Invariant Theory*, Lecture Notes in Math. **585**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1977.

[68] Tonny A. Springer, *Aktionen reduktiver Gruppen auf Varietäten*, in: Hanspeter Kraft, Peter Slodowy, Tonny A. Springer, Hsg., *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Seminar* **13**, Birkhäuser, Basel 1987.

[69] Richard P. Stanley, *Invariants of Finite Groups and their Applications to Combinatorics*, Bull. Amer. Math. Soc. **1(3)** (1979), 475–511.

[70] Bernd Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Springer-Verlag, Wien, New York 1993.

[71] Moss E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York 1969.

[72] Jacques Thévenaz, *G-Algebras and Modular Representation Theory*, Clarendon Press, Oxford 1995.

[73] William C. Waterhouse, *Intoduction to Affine Group Schemes*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1979.

Notationen

Register