Technische Universität München

Schnupperstudium 2022

(Kubische Gleichungen und komplexe Zahlen)

Dr. Fabian Reimers

Blatt 1

Übungen (Montag 13.6.22)

A 1 Binomische Formeln

Tragen Sie die fehlenden ganzzahligen Koeffizienten ein, so dass die folgenden binomischen Formeln für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten:

$$(a+b)^4 = \boxed{}\,a^4 + \boxed{}\,a^3b + \boxed{}\,a^2b^2 + \boxed{}\,ab^3 + \boxed{}\,b^4,$$
$$(a+b)^5 = \boxed{}\,a^5 + \boxed{}\,a^4b + \boxed{}\,a^3b^2 + \boxed{}\,a^2b^3 + \boxed{}\,ab^4 + \boxed{}\,b^5,$$
$$(a+b)^6 = \boxed{}\,a^6 + \boxed{}\,a^5b + \boxed{}\,a^4b^2 + \boxed{}\,a^3b^3 + \boxed{}\,a^2b^4 + \boxed{}\,ab^5 + \boxed{}\,b^6.$$

A 2 Kubische Gleichung

Bestimmen Sie eine Nullstelle von $f = x^3 + 6x^2 + 9x - 2$, indem Sie zuerst die zu $f(x) = 0$ äquivalente reduzierte Form $y^3 + py + q = 0$ herleiten und dann die Cardano'sche Formel anwenden.

A 3 Casus irreducibilis

Wir betrachten das Polynom $f = x^3 - 8x - 3$ mit der vorgegebenen Nullstelle $x_1 = 3$.

(a) Bestimmen Sie mittels Polynomdivision alle reellen Nullstellen von f.

(b) Versuchen Sie alternativ die Cardano'sche Formel anzuwenden und zeigen Sie, dass dieses Vorgehen scheitert.

A 4 Rationale Nullstellen

Es sei $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein ganzzahliges Polynom, also $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Für ganze Zahlen $c, d \in \mathbb{Z}$ schreibt man $c \mid d$ („c teilt d"), wenn ein $e \in \mathbb{Z}$ mit $ce = d$ existiert.

(a) Es sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f, wobei der Bruch vollständig gekürzt sei, also $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie:

$$a \mid a_0 \quad \text{und} \quad b \mid a_n.$$

(b) Jetzt sei f normiert, also $a_n = 1$. Zeigen Sie, dass jede Nullstelle $\alpha \in \mathbb{Q}$ von f bereits in $\mathbb{Z}$ liegt und für eine Nullstelle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a \mid a_0$.

(c) Bestimmen Sie auf diese Weise alle rationalen Nullstellen von

$$f = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 \quad \text{und} \quad g = x^3 + 6x - 20.$$

Zusatzfrage: Wie ergibt sich bei g die Nullstelle aus der Cardano'schen Formel?