



Blatt 4

Übungen (Freitag 17.6.22)

A 11 Biquadratische Gleichungen

Eine Polynomgleichung 4. Grades, bei der keine x -Potenzen ungeraden Grades auftreten, also der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

wird manchmal *biquadratisch* genannt. Durch Substitution (z. B. $x^2 = t$) lassen sich biquadratische Gleichungen leicht lösen. Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen von

(a) $x^4 + 2x^2 - 35$,

(b) $x^4 + 1$.

A 12 Tschirnhaus-Transformation

Es sei

$$f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

ein Polynom 4. Grades (also $a \neq 0$). Finden Sie eine geeignete Variablentransformation (von x zu y), so dass ein Polynom der Form

$$g = y^4 + py^2 + qy + r$$

mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(y) = 0$ entsteht.

Hinweis: Sie müssen die Variablentransformation hier nicht vollständig durchführen, sondern nur zeigen, dass der Term y^3 „verschwindet“.

A 13 Newton-Verfahren

- (a) Es sei $a \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Quadratwurzel von a (also einer Nullstelle von $x^2 - a$) auf die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

führt.

Bemerkung: Diese Benutzung des arithmetischen Mittels von x_n und a/x_n , um die Wurzel von a anzunähern, ist auch als **babylonisches Wurzelziehen** bekannt.

- (b) Berechnen Sie im Fall $a = 2$ mit Startwert $x_0 = 1$ die ersten Folgenglieder x_1, x_2, x_3 als Annäherungen an $\sqrt{2}$.