Prof. Dr. E. Viehmann WS 2014/15

Seminar Lokale Körper

Teil 1: Lokale Körper

Vortrag 1 : p-adische Zahlen. Definition von p-adischen Zahlen und ganzen p-adischen Zahlen, Interpretation als Limes ([N2], II.1), Lösbarkeit von Gleichungen ([N2], II.1.4), p-adischer Absolutbetrag ([N2], II.2). Die Interpretation als Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ bezüglich des Absolutbetrags sollte höchstens skizziert werden.

Vortrag 2: Diskrete Bewertungsringe. Bewertungen, Bewertungen von $\mathbb{Q}$, Bewertungsring, diskrete Bewertungsringe, Beispiele (Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ oder allgemeiner von einem Dedekindring an einem Primideal, p-adische Zahlen, Potenzreihenringe), Einheitengruppe eines Bewertungsrings (die Einseinheiten brauchen nicht genauer untersucht zu werden). ([N2], II.3, [S], I.1, und letztes Korollar aus I.3)

Vortrag 3: Vervollständigung, lokale Körper. Vervollständigung eines Körpers bzgl. einer Bewertung (ohne alle Details auszuführen, verweisen Sie ggf. auf die Analogie zur Konstruktion der reellen Zahlen), Beispiel $\mathbb{Q}_p$, Definition lokaler Körper, Henselsches Lemma, Einheitengruppe $K^\times$ eines lokalen Körpers K. ([N2], II.4, II.5.3)

Vortrag 4: Erweiterungen lokaler Körper, Klassifikation. Fortsetzung von Bewertungen ([N2], II.4.8, II.6.2), Verzweigungsindex und Trägheitsgrad einer Erweiterung, fundamentale Gleichung ([N2], II.6,8), Klassifikation lokaler Körper ([N2], II.5.2, [S], II.4-6)

Vortrag 5: Proendliche Gruppen, maximal unverzweigte Erweiterung. Im ersten Teil sollen proendliche Gruppen (also projektive Limiten endlicher Gruppen) definiert und der Hauptsatz der unendlichen Galoistheorie angegeben werden ([G] 1, vgl. auch [N2], IV.2, insbesondere die Beispiele 1-5 sollten erklärt werden). Zum Schluß soll die maximale unverzweigte Erweiterung eines lokalen Körpers definiert und ihre Galoisgruppe berechnet werden ([N2] II.7, verwenden Sie [N2], IV.2, Beispiel 5).

Teil 2: Gruppenkohomologie

Vortrag 6: Gruppenkohomologie. In diesem Vortrag werden für eine Gruppe G die Kohomologiegruppen $H^q(G, A)$ für jeden $\mathbb{Z}[G]$-Modul A definiert und studiert. Zum Beispiel ist $H^0(G, A)$ die Untergruppe A^G der G-invarianten Elemente von A. Inhalte: Definition von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln, Beispiel L und $L^\times$ als $\mathrm{Gal}(L/K)$-Moduln, Definition der Gruppenkohomologie $H^q(G, A)$, lange exakte Sequenz, Interpretation von H^i für kleine i, insbesondere für $i = -1, 0, 1$ ([N] I.1-3, vgl. auch [AW] 1-3,6).

Vortrag 7 : Restriktion und Inflation. Zu einem Homomorphismus endlicher Gruppen (z.B. der Inklusion einer Untergruppe, oder Projektion auf einen Quotienten) erhält man eine zugehörige Abbildung zwischen den Kohomologiegruppen. In diesem Vortrag werden diese sogenannten Restriktions- und Inflationsabbildungen erklärt und eine davon induzierte exakte Sequenz hergeleitet ([N] I.4).

Vortrag 8: Cup-Produkt, Herbrand-Quotienten. Wie auch zum Beispiel in der deRham-Kohomologie gibt es auf den Kohomologiegruppen einer endlichen Gruppe ein cup-Produkt. Es wird durch das Tensorprodukt von G-Moduln induziert. Damit zeigen wir, dass die Kohomologiegruppen für zyklisches G periodisch sind. Inhalte: Tate-Kohomologiegruppen $\hat{H}^q(G, A)$, Cup-Produkt und Eigenschaften, Herbrand-Quotienten für die Gruppenkohomologie zyklischer Gruppen ([AW] 7-8).

Vortrag 9: Satz von Tate. Der Satz von Tate konstruiert mit Hilfe des Cupproduktes unter gewissen Voraussetzungen an den G-Modul A einen Isomorphismus $\hat{H}^q(G, \mathbb{Z}) \to \hat{H}^{q+2}(G, A)$. Für $q = -2$ erhält man einen Isomorphismus $G/[G, G] \to A^G/N(A)$, der später die Reziprozitätsabbildung induziert ([AW] 9-10).

Teil 3: Lokale Klassenkörpertheorie

Vortrag 10: Galoiskohomologie, Brauergruppe. In diesem Vortrag werden die Ergebnisse der letzten Vorträge auf die Galoisgruppe G einer Körpererweiterung L/K, die auf $L^\times$ operiert, angewandt ([G] 2). (Die additive Gruppe von L ist wenig interessant, da $H^q(L/K, L) := H^q(G, L) = 0$ für alle q) Ist G zyklisch, so ist $H^1(G, L^\times)$ trivial (Hilberts Satz 90).
Im zweiten Teil soll die Brauergruppe $H^2(K^{sep}/K, K^{sep,\times})$ eines lokalen Körpers K berechnet ([S2] 1) und der Zusammenhang zu zentraleinfachen Algebren erklärt werden ([S] X.5). (Hierbei ist K^{sep} ein separabler Abschluß von K.)

Vortrag 11 : Reziprozitätsgesetz. Mit Hilfe des Satzes von Tate erhält man für Galoiserweiterungen L/K eines lokalen Körpers mit abelscher Galoisgruppe einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}(L/K) \cong K^\times/N_{L|K}(L^\times)$, die Reziprozitätsabbildung (bzw. den ersten Hauptsatz der lokalen Klassenkörpertheorie). Diese Abbildung soll beschrieben und für unverzweigte Erweiterungen explizit berechnet werden ([S2] 2.1-6,2.8).

Vortrag 12 : Existenzsatz. Der Existenzsatz oder zweite Hauptsatz der Klassenkörpertheorie besagt, daß genau diejenigen Untergruppen von $K^\times$ als Normgruppe einer endlichen abelschen Erweiterung auftreten, die offen und von endlichem Index sind ([S] XIV.6 und XI.5).

Bei Fragen schicken Sie bitte eine Email an viehmann@ma.tum.de

Literatur

[AW] M. Atiyah, C. Wall: Cohomology of groups, in [CF]

[CF] J. Cassels, A. Fröhlich (eds.): Algebraic Number Theory (bitte nicht ausleihen, soll noch in den Semesterapparat)

[G] K. Gruenberg: Profinite groups, in [CF]

[N1] J. Neukirch: Klassenkörpertheorie, die Neuauflage ist in elektronischer Version im Internet erhältlich.

[N2] J. Neukirch: Algebraische Zahlentheorie

[S] J.-P. Serre: Corps locaux / Local fields

[S2] J.-P. Serre: Local Class Field Theory, in [CF]