Gerd Fischer · Matthias Lehner ·
Angela Puchert

Einführung in die Stochastik

Die grundlegenden Fakten mit zahlreichen Erläuterungen, Beispielen und Übungsaufgaben

Ergänzungen und Verbesserungen

Stand: Oktober 2016

Die Zahl zu Beginn einer Zeile benennt die Seitennummer (Hochgestellte Zahlen bedeuten: Zeile von oben, tiefgestellt Zahlen bedeuten: Zeile von unten).

61_1	*statt*	$\sqrt{(\lVert X\rVert^2 - n\overline{x})(\lVert Y\rVert^2 - n\overline{y})}$	*lies*	$\sqrt{(\lVert X\rVert^2 - n\overline{x}^2)(\lVert Y\rVert^2 - n\overline{y}^2)}$
76^2	*statt*	straffen Konvergenz	*lies*	zügigen Konvergenz
84^{15}	*ergänze:*	$\Omega = \{0,1,2,\dots\}$; $k = 0$ bedeutet: 6 ist nie gefallen, $p(0) = 0$.		
89_9	*statt*	$P_X(a)$	*lies*	$p_X(a)$
96_5	*statt*	$P(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) > 0$ für $m = 1,\dots,r-1$, so gilt	*lies*	$P(A_1 \cap \dots \cap A_{r-1}) > 0$, so gilt
101^1	*statt*	relative Häufigkeit	*lies*	Wahrscheinlichkeit
151^1	*statt*	Ergebnis einer	*lies*	Ergebnis einer Binomialverteilung
158	*Im Approximationssatz:*			
	statt	Weiter seien $r,n \in \mathbb{N}$ so gewählt …	*lies*	Weiter seien $r,N \in \mathbb{N}$ variabel und so gewählt …
181^{10}	*statt*	$\mathrm{Var}(X)$	*lies*	$V(X)$
198	Beweis des lokalen Grenzwertsatzes: vgl. etwa [KRE, §5]			
205_9	*statt*	$\varphi(\alpha_n(k))$	*lies*	$\varphi(a_n(k))$
210^{10} und 213^3	*statt*	endlicher Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P)	*lies*	allgemeiner Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$, vgl. Kapitel 2.6.2

Dass die Voraussetzung „endlich" nicht angemessen ist, folgt aus der einfachen

Bemerkung: Auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) existiert keine unendliche Folge $X_1,X_2,\dots$ von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X_i mit $V(X_i) > 0$.

Den folgenden schönen elementaren **Beweis** hat uns K. Nawrotzki übermittelt:

Ist Ω endlich, so gibt es nur endlich viele $A \subset \Omega$. Also existiert ein $q > 0$ mit $P(A) \geqslant q$ für ein beliebiges $A \subset \Omega$ mit $P(A) > 0$. Da $V(X_i) > 0$, gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < p := P(X_i = x) < 1$ für alle i. Wegen der Unabhängigkeit der X_i ist für alle $n \geqslant 1$

$$P(X_1 = x,\dots,X_n = x) = (P(X_1 = x))^n = p^n.$$

Das Ereignis $A_n := \{\omega \in \Omega, X_1(\omega) = x,\dots,X_n(\omega) = x\}$ hat also die Wahrscheinlichkeit $P(A_n) = p^n > 0$ und für ein genügend großes n ist $p^n < q$, im Widerspruch zu $P(A) \geqslant q$ für beliebiges A mit $P(A) > 0$.

213^{14}	*statt*	$X_i(1) = p$ und $X_i(0) = 1 - p$	*lies*	$P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$
220^{2}	*statt*	$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$	*lies*	$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
220 **W2**	*statt*	für disjunkte	*lies*	für paarweise disjunkte
230_{14}	*statt*	Petersberger	*lies*	Petersburger
232^{9}	*statt*	$(t - E(X)^2)$	*lies*	$(t - E(X))^2$
270^{10}	*statt*	σ_0	*lies*	σ_0^2
297^{13}	*statt*	„Mehr als die Hälfte“	*lies*	„Höchstens die Hälfte“
300_{10}	*statt*	folgende Voraussetzung gemacht	*lies*	folgende, in der Realität nur annähernd erfüllte, Voraussetzung gemacht
300_{9}	*statt*	X ist annähernd normalverteilt	*lies*	X ist normalverteilt
$301^{2,5}$	*streiche*	annähernd		
304^{9}	*statt*	μ	*lies*	μ_0
312^{4}	*statt*	-t-Test	*lies*	t-Test
312^{12}	*statt*	$\mu > 0$	*lies*	$\mu > \mu_0$

323 Beispiel 2: Die Annahme einer Gleichverteilung der Ziffern ist mit größter Vorsicht zu behandeln. Das BENFORDsche Gesetz der ersten Ziffer macht eine Aussage über genügend gut gemischte Datensätze in Dezimaldarstellung. Bei den ersten Ziffern ist die Wahrscheinlichkeit extrem ungleichmäßig:

Erste Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wahrscheinlichkeit in %	0	30·1	17·6	12·5	9·7	7·9	6·7	5·8	5·1	4·6

Bei den folgenden Ziffern wird ziemlich schnell eine Gleichverteilung approximiert. Je nach Art des Datensatzes sind also bei der Steuerprüfung angemessene Wahrscheinlichkeiten zu wählen.

351^{6}	*statt*	$0{\cdot}32$	*lies*	$2{\cdot}82$
360^{7}	*statt*	$0{\cdot}6$	*lies*	$0{\cdot}821$
360^{12}	*statt*	$\binom{15}{0}$	*lies*	$\binom{n}{0}$
368_{18}	*statt*	$\sum_{l=k}^{10} \binom{10}{k}$	*lies*	$\sum_{l=k}^{10} \binom{10}{l}$
368_{17}	*statt*	$g(0{\cdot}5, 10, 9) = 0{\cdot}010$	*lies*	$g(0{\cdot}5, 10, 9) = 0{\cdot}0107$