Sommersemester 2022 Claudia Scheimbauer

Geometrische Schmankerl

Knoten, Parkettierungen, und Triangulierungen

Wann: 6.-8.April

Webseite: `https://www.groups.ma.tum.de/algebra/scheimbauer/` ⇒ Lehre ⇒ Geometrische Schmankerl

1. Allgemeines und Technik

Jeder Vortrag soll **30 Minuten** lang sein. Suchen Sie sich als Erstes geeignete Referenzen, und schicken Sie mir ca. 2-3 Wochen vor Ihrem Vortrag die Referenzen und eine grobe Übersicht von Ihrem Vortrag. Jeder Vortrag sollte (mindestens) enthalten:

- 3 Beispiele und ein Gegenbeispiel zur Illustration der Konzepte
- einen (kurzen aber rigorosen) Beweis einer mathematischen Aussage
- eine Illustration/Animation/Zeichnung zu jeder neuen Definition

Außerdem sollten Sie ein Handout vorbereiten, dass Sie vor Ihrem Vortrag an alle verteilen.

Wir werden **Zoom** benutzen. Es gibt verschiedene Methoden einen Vortrag mittels Zoom zu halten. Werden Sie kreativ! Sie können z.B.:

- auf einem Tablet oder Eingabepad schreiben, falls vorhanden. Dabei kann man entweder direkt den Schirm vom Tablet teilen oder es mit einem Computer verbinden, den man teilt.
- eine Kamera (z.B. Smartphone) fest positionieren und darunter ein Blatt Papier legen, auf dem man schreibt. Das funktioniert sehr gut, wenn man es ein bisschen übt!
- eine Präsentation vorbereiten, z.B. mit LaTex. Diese Option empfehle ich nicht, da man nicht spontan auf Fragen reagieren kann, und man fast immer zu schnell ist.
- Bei allen Optionen kann man kurze Videos, Fotos und Animationen von Webseiten zwischendurch zeigen. Numberphile ist eine gute Ressource dafür.

Sie sollten die von Ihnen gewählte Methode vorher ausgiebig auf Zoom testen. Sie können dafür unseren Zoomraum benutzen. Ich empfehle, dass Sie eine Vortragsmethode wählen, bei der Sie den Teilnehmern ermöglichen, das bereits Geschriebene lesen zu können, z.B. mittels live-backup, vorgeschriebenen Notizen, oder dem Teilen der Präsentation.

Als Zuhörer ermutige ich Sie, Ihre **Kamera einzuschalten**. Das hilft dem Vortragenden sehr, insbesondere in unserer sehr kleinen Gruppe. Wenn wir uns in einem Hörsaal treffen würden, sehen wir uns ja auch. Auf Zoom kann man übrigens bei vielen Geräten einen virtuellen Hintergrund einstellen.

Nach jedem Vortrag muss jede(r) Teilnehmer(in) **konstruktives Feedback** geben. Weiters muss jede(r) im Laufe des Seminars mindestens **zweimal eine Frage** stellen. Beides kostet anfangs etwas Überwindung, aber Sie werden sehen, dass es leichter wird.

2. Inhalt

Übersicht der Themen:

(1) Knots I: Definition von Knoten & Verschlingungen (links), Reidemeister-Bewegungen, Dreifärbungen (tricoloring)

(2) Knots II: Jones Polynom

(3) Knots III: Zöpfe und die Zopfgruppe (Braids and the braid group)

(4) Knots IV: Conway’s tangles und Kettenbrüche (continued fractions)

(5) Borromäische Ringe: als starre Ringe können diese nicht existieren

(6) Parkettierungen I: reguläre Parkettierungen (regular tilings)

(7) Parkettierungen II: Penrose Parkettierungen (Penrose tilings)

(8) Triangulierungen I: Eulersche Polyeder formel/Euler’sche Zahl via Triangulierungen

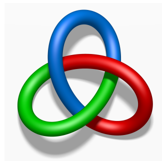
(9) Triangulierungen II: Klassification von Flächen, ausgehend von einer Triangulierung

(10) Bandornamente (Frieze patterns) I: Definition and Symmetrien

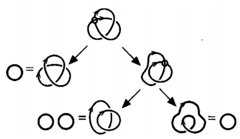
(11) Bandornamente (Frieze patterns) II: Zusammenhang mit Triangulierungen

2.1. **Knoten.** Die allgemeine Referenz ist [1]. Weiters hilfreich: [2],

2.1.1. *Knoten I: Reidemeister-Bewegungen und Dreifärbungen.* Erklären Sie auf informelle Art[1] den Begriff eines Knotens und einer Verschlingung (link). Erklären Sie Knotendiagramme oder -projektionen und Reidemeister-Bewegungen. Wann sind zwei Knoten äquivalent? Was ist eine Knoteninvariante? Erklären Sie Dreifärbungen (tricoloring). Beweisen Sie, dass Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante ist. Erklären Sie was die Verschlingungszahl (linking number) einer Verschlingung ist und dass es eine Verschlingungsinvariante ist. Wählen Sie ein weiteres Konzept zu Knoten aus (das in den anderen Vorträgen nicht vorkommt) und erklären Sie es.



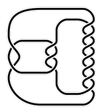
2.1.2. *Knoten II: Knot polynomials.* Erklären Sie das Klammerpolynom (bracket polynomial) und das Kauffmann X Polynom oder das Jones Polynom eines Knotens. Zeigen Sie (teilweise), dass es eine Knoteninvariante ist. Rechnen Sie einige Beispiele und beweisen Sie damit, dass zwei nicht offensichtlich verschiedene Knoten tatsächlich verschieden sind.



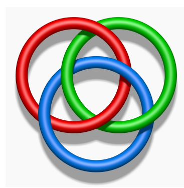
2.1.3. *Knots III: Zöpfe und die Zopfgruppe (Braids and the braid group).*

Erklären Sie, was ein Zopf ist. Skizzieren Sie, dass man jeden Knoten von einem Zopf durch Abschließen (closure of a braid) erhält. Definieren Sie die Zopfgruppe und erklären Sie den Zusammenhang.

2.1.4. *Knots IV: Conway’s rational tangles und Kettenbrüche (continued fractions).* Erklären Sie die Konstruktion von “tangles” ausgehend von einer (endlichen) Folge von ganzen Zahlen. Diese werden rationale “tangles” genannt. Das kann normalerweise gut mit zwei Seilen demonstriert werden – online vielleicht eher mit farbigen Schnüren. Erklären Sie was ein Kettenbruch ist, und wie diese mit rationeln “tangles” zusammenhängen. Erhalten Sie eine Bijektion?



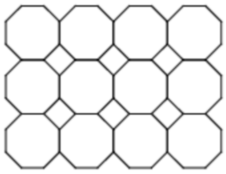
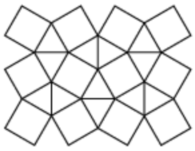
2.1.5. *Borromäische Ringe: als starre Ringe können diese nicht existieren.* Die Borromäischen Ringe sind das ein wunderschönes Beispiel einer Verschlingung, das in der Kunst immer wieder auftritt. Allerdings sind Darstellungen davon eine geschickte Illusion, wenn man die Ringe als starre Ringe annimmt, so wie wir uns einen Ring eben vorstellen. In diesem Vortrag erklären Sie die Idee warum das so ist.



2.2. **Parkettierungen.** Ein schöner Übersichtsartikel ist `http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-penrose`. Ein ausführliches Buch ist [3].

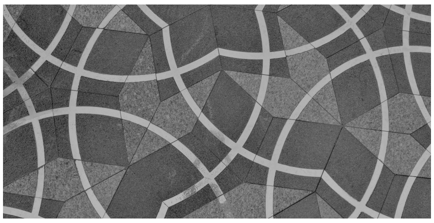
[1] Für die mathematisch saubere Definition bräuchten Sie den Begriff einer Einbettung.

2.2.1. *Parkettierungen I: (semi-)reguläre Parkettierungen (semi-regular tilings).*

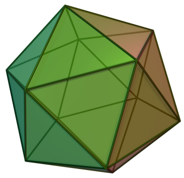
Erkläre was eine Parkettierung und eine (semi-)reguläre Parkettierung ist. Viele Beispiele finden sich in Escher's Bilder. Erklären Sie die auftauchenden Symmetrien und ein Klassifikationsresultat.

2.2.2. *Parkettierungen II: Penrose Parkettierungen (Penrose tilings).*



Erklären Sie was die Penrose Parkettierung ist und warum es nicht-periodisch ist.

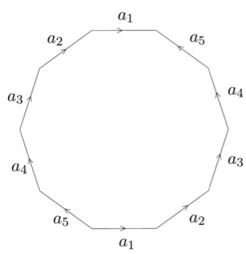
2.3. **Triangulierungen.**



2.3.1. *Triangulierungen I: Eulersche Polyederformel/Euler'sche Charakteristik via Triangulierungen.* Die Eulersche Polyederformel, die uns hier interessiert, besagt Folgendes. Für ein beliebiges konvexes Polytop sei v die Anzahl der Ecken, e die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Seitenflächen. Dann gilt:

$$v - e + f = 2.$$

Es gibt sehr viele verschiedene Beweise der Eulerschen Polyederformel. Suchen Sie sich einen (oder mehrere) aus (z.B. [4, p. 260ff] und erklären Sie ihn. Gerne können Sie einen Ausblick zu Verallgemeinerungen, z.B. für triangulierte (orientierte) Flächen, geben. Dazu nehmen Sie sich eine orientierte Fläche und wählen Sie sich eine Triangulierung (dazu hilft der nächste Vortrag). Nun berechnen Sie $v - e + f$. Was fällt Ihnen auf?

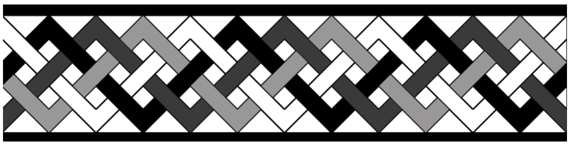


2.3.2. *Triangulation II: Klassifikation von Flächen, ausgehend von einer Triangulierung.* Wenn man bei einem regulären $2n$-Polygon wiederholt je zwei Kanten verklebt, so lange, bis keine Kanten mehr übrig sind, dann erhält man eine Fläche. Jede so erhaltene Fläche ist "äquivalent" zu entweder einer orientierten Fläche von Geschlecht g, oder zu einer k-fachen projektiven Ebene. Erklären Sie diese Objekte und die Aussage des Satzes.

Skizzieren Sie einen Teil des Beweises dieser Aussage. Dabei werden die Kanten, die verklebt werden durch Buchstaben indiziert, und verschiedene Buchstabenfolgen identifiziert. Eine sehr ausführliche Referenz ist [5].

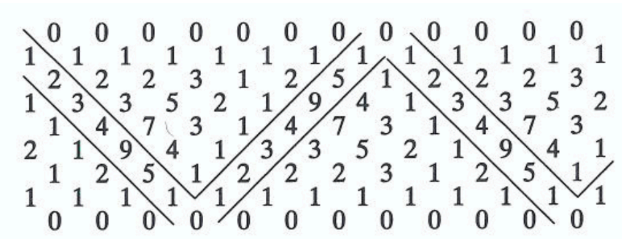
2.4. **Bandornamente.** Eine Sammlung von Referenzen finden Sie oben auf folgender Webseite: `https://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Projects/frieze/frieze-res.html` Sie können sich daraus Beispiele und hübsche kleine Resultate aus den Referenzen selbst aussuchen.

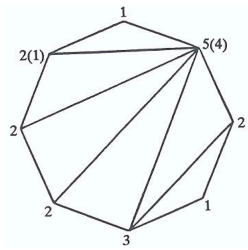
2.4.1. *Bandornamente (Frieze patterns) I: Definition and Symmetrien.*



Geben Sie die Definition und erste Beispiele von Bandornamenten. Sie können mit geometrischen Bandornamenten anfangen, und dann Bandornamente mit Zahlen erklären. Diskutieren Sie die auftauchenden Symmetrien. Suchen Sie sich ein nettes Resultat aus und erklären Sie es (natürlich in Absprache mit dem nächsten Vortrag).

2.4.2. *Bandornamente (Frieze patterns) II: Zusammenhang mit Triangulierungen.*





Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Bandornamenten mit ganzzahligen Einträgen und Triangulierungen eines Polygons. Erklären Sie einige Beispiele und Folgerung(en) davon.

Bemerkung: Die meisten Bilder sind von Wikipedia oder direkt aus dem referenzierten Artikel. Man sollte immer auf die Lizenzierung achten.

References

[1] C. Adams. The knot book. `http://people.math.harvard.edu/~ctm/home/text/books/adams/knot_book/knot_book.pdf`.

[2] Maike Akveld and Otto Neumaier. Die mathematische knotentheorie und ihre aktuellen anwendungen. `https://people.math.ethz.ch/~akveld/ArtikelAkveldNeumaier.pdf`.

[3] Branko Grünbaum and G. C. Shephard. *Tilings and patterns*. A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Company, New York, 1989. An introduction.

[4] Peter M. Gruber. *Convex and discrete geometry*, volume 336 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Berlin, 2007.

[5] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition of [MR0464128].